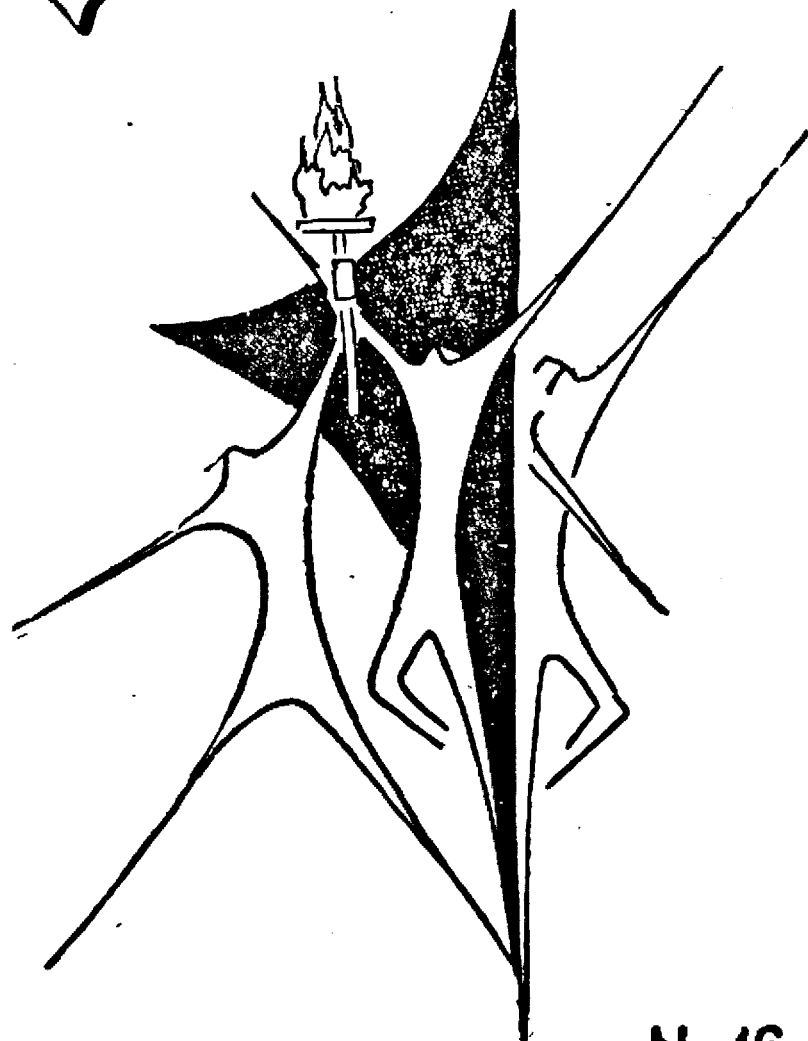




laboremus

REVISTA ELEVILOR LICEULUI
„IOAN SLAVICI” ARAD



Nr. 16-1978

CUPRINS

OMAGIU

- Aniversare Doina Claudia Popa
- Cîntec Puiu Nedea
- Fiul patriei Calin Man

EVOCĂRI

- 130 de ani de la nașterea unui titan al scrisului românesc
- Ioan Slavici Ionel Rațiu
- Aradul 1978 — Mari aniversări istorice Julieta Turcanu
- Laboremus și debutul lui M. Bealuc prof. dr. Tudor Căpriș

PEGAS

- Patrie Cornelia Tămas
- Primăvara unui geniu Călin Man
- Lan de griu Călin Man
- Clipa Ada Mănescu
- Unde sint? Ada Mănescu
- Obirșie Puiu Nedea
- Balada lui Ciprian Carmen Stingu
- Cîntec de toamnă Călin Man
- Basm Lucia Crăciun
- Regăsire incertă Puiu Nedea
- Singurătate Puiu Nedea

DIN ACTIVITATEA CERCURILOR PE OBIECTE

- Coșca — poet al pătimirii noastre Mariana Turda
- „Somnul din somn” de A. Blandiana Mirela Turc
- „Note pentru o singurătate” de A. Bosquet Lucia Crăciun
- Activități în cadrul cercului de biologie Dana Cîrlig
- Recreeri prin activități creatoare Dorina Puscău
- Analiza spectrală Ileana Ionuț
- Efect Procopiu Lucia Crăciun
- Șiruri recurente Emil Cornea
- Numărul soluțiilor întregi Marcel Petrișan
- Legătura de hidrogen Dan Ancăteu și Florin Nicolae

MOZAIC

- Organizația U.T.C. — realizări și idealuri Otilia Hedeșan
- Manifestare culturală Claudia Popa
- Umoristice culese de G. Braun
- Aritmografiile Luminița Bălaș
- Breviar Eugen Moraru și Radu Tașcă
- Ilustrația grafică Eugen Moraru și Radu Tașcă

LICEUL „IOAN SLAVICI”
A R A D

LABOREMUS

Nr. 16 — MARTIE 1978

OMAGIU

Aniversare

Acum, cînd cununa îți cuprinde,
Cea de a 60-a primăvară,
Noi toți cu inima fierbinte
Te socotim pîrinie-n țară.

Tu ai luptat și ai trudit din greu,
Iar munca ți-a fost răsplătită
Prin jertta lor, a celor ce mereu
Te apără, te laudă, te cîntă.

Din sufletele noii generații
Din mii și milioane de români,
Pe roșul steag al libertății
Conducător te știm printre români.

Răsună-n gînd, ca dintr-un glas,
Cuvintele ce le rostim ca o văpaie,
Aceleași tot mereu, și pas cu pas,
E numele de Ceaușescu Nicolae.

Ți-au așezat pe frunte-ți lauri,
Ca veșnic pentru noi să dăinuiești
Om al răbdării, cinstei și dreptății,
Tu, tînăr ilu, născut în Scornicești.

Tu ești eroul temerar, cutezător,
Ești cel mai bun oștean al gliei,
Erou prezent și viitor,
De pe Cuprinsul României.

Din inimi îți aducem un salut fierbinte
Mulți ani, mulți ani să ne trăiești,
Stimate și iubite preșdinte.

Doina-Claudia Popa
Cls. a XI-a „E”

CÎNTEC

Cîntec daltuit în cremene
Îl dăruiesc acestui plai străbun.
Primului fiu al patriei să-i semene
În zborul Comunismului spre-azur.

Din glasurile-eroilor răzbat
Strălucitoare steaguri — brațe de bărbat
Ce-și modelează-n cîntec tăria,
Chipul, glasul, forța, hărnicia.

În zîmbetul luminii se oglindește țara
Cu-al ei prim președinte, Ceaușescu Nicolae,
Cu-nădmnul lui fierbinte de părinte
În suferetele gîndului-cuvinte.

Lumina noastră revărsată-n cînt
De glorie și de avînt,
E de-a sui spre culmile mîndriei
Acest granit de soare-al României.

Puiu Nedea
Cls. a XII-a B seral

Fiul patriei

Dimineața, cerul răsare senin
din zăpada griului
ce-și înalță
spicul cu tîmple de aur.

Trandafiri și garoale pentru
bucetul de lumină
al spicului de griu —

Griul inimii va rodi
totdeauna,
Dîndu-ne imensa plîne
a libertății.

PENTRU FIUL PATRIEI
PENTRU MĂRIREA EI.

Călin Man
Cls. a X-a E



„Laboremus“ și debutul lui Mihai Beniuc

Dintre revistele școlare arădene, care continuă în perioada interbelică tradițiile școlii românești ale orașului de pe Mureș, merită o atenție specială **Laboremus**.

Revistă a elevilor de la Liceul „Moise Nicoară” din Arad, cu format de gazetă de 8 pagini, ea apare sub supravegherea profesorului I. Langa, avînd ca redactor pe elevul Gh. Floru. Primul număr poartă data de 25.IV.1926.

Într-un entuziast și simțit articol editorial „Ce vrem noi” se prezintă scopurile patriotice ale revistei:

„Vrem ca surplusul de energie tinerească ce avem în noi să-l întrebuințăm în încercarea de a pune pe hirtie un gînd sau o simțire ce țîșnește involuntar din suietul nostru plin de entuziasm.

Vrem să cunoaștem și să facem cunoscut în măsura puterilor noastre, un colț din frumosul pămînt românesc.

Vrem să sporim gloria românească într-un oraș mare, unde se vorbește și se scrie mai mult în alte limbi și vrem cu o oră mai înainte să începem lupta grea ce ne așteaptă mîine, pentru consolidarea și întărirea frumoasei noastre țări.”

Polivalent, Vicențiu Bugariu — cel mai activ colaborator — va scrie și „Imnul elevilor” — care va deveni imnul liceului. Ziarist bine cunoscut în Transilvania își va risipi cu dărnicie talentul în zeci de reviste, stingîndu-se ca o flamă prea vie în 1932, la vîrsta de 24 de ani.

Revista își sporește considerabil valoarea ca document de istorie literară, deoarece ea adăpostește debutul academicianului M. Beniuc, pe atunci elev al liceului „Moise Nicoară”.

Spirit instruit și multilateral, M. Beniuc va aborda cu dezinvoltură în revistă diferite domenii. Cea mai substanțială contribuție a sa este aceea de critic literar. El va recenza cu o surprinzătoare siguranță și intuiție volumele de versuri: „În robia lor” de Aron Cotruș și „Scut și țargă” de Perpessicius. Alegerea acestor două cărți nu e întîmplătoare. Pe undeva se va întîlni cu acești poeți. De Cotruș îl va lega filonul comun ardelenesc, o anumită rigurozitate și dirzenie moșească, iar de Perpessicius, drama războiului și a exodului care o va trăi și el artistic în cea de a doua ediție a războiului mondial.

La Cotruș, Beniuc sesizează „afinitatea cu W. Whitman, umanul „Peer Gynt” al Americii”, intuiește just raportul dintre substanța geologică a poeziei și expresia ei orogenică („versuri masive și dezordonate ca și natura creațiilor sale”) și identitatea

perfectă a poetului cu opera („E poetul cel mai unitar poate și cel care se confundă cel mai mult cu opera”).

O excelentă caracterizare de ansamblu cu note lirice (parcă în spiritul „mențiunilor” lui Perseus) o va face Beniuc volumului „Scut și targă”: „Toată epopeea războiului e cîntată în imagini plastice și sugestive. Ai zice un jurnal al poetului plecat pe Dunăre spre tărîmul de-a pururi al tristei Proserpine, așezat toamna sub cerul înorat al Dobrogei, care parcă plînge și el la spectacolul tragediei ce se desfășoară sub el”.

În poezie, Beniuc debutează ca traducător, făcînd dovada excelențelor sale cunoștințe prozodice și lăsînd să se întrevadă un anumit timbru elegiac al viitoarelor sale „Cîntece de pierzanie”. E vorba de poezia „Clopotele de seară” a romanticului irlandez Th. Moore (1779—1852), transpusă cu virtuozitate și sentiment:

O, clopote de seară, dulci clopote de seară
Cu vocea tînguioasă îmi amintiți voi iară
De zilele trecute, de-acasă și de ceasul
Cînd pe cărări străine mi-am îndreptat eu pasul.
S-au dus acele vremuri, azi nu-s decît poveste
Din cei ce v-ascultară nici unul nu mai este,
S-au dus, s-au dus departe în groapa solitară
Și nu vă mai ascultă, o, clopote de seară.
Tot astfel cînd din lume mă voi fi dus și eu
Doar tînguitalul vostru va răsuna mereu
Dar alți poeți vor trece prin valea milenară
Și vor cînta din liră, dulci clopote de seară.

Prof. dr. Tudor Opris
București

130 de ani de la nașterea unui titan al scrisului românesc — IOAN SLAVICI

MOTTO : „Îl vedem deasupra noastră, mare în
literatură, fruntaș al condeielui,
premergător și explorator al frumuseților graiului și al sufletului
poporului român”

(Gala Galaction)

Cu Ioan Slavici a dispărut cel din urmă sol întîrziat printre noi al unei generații strălucite de scriitori ai literaturii neamului de dincolo de „Sămănătorul”, cea din urmă legătură vie, peste decenii, cu vechea tradiție literară.

„Fiul cojocarului” din Șiria părea lăsat anume în urmă de către „ceilalți”, sântinelă de ariergardă, să privească în juru-i, senin și treaz pînă la sfîrșit, ca să poată duce din lumea aceasta a noastră vestea supremă marilor lui prieteni, trecuți de mult în împărăția liniștei. Om simplu din popor, care i-a înțeles toate bătăile inimii, autorul nemuritoarelor nuvele, cu toate că nu fusese un geniu, el avusese aceeași soartă — cum ar fi spus Eminescu — cu a omului de geniu pe care societatea nu-l înțelege, nu-l apreciază și care în fond îl respinge.

Pușini cititori din generația lui l-au prețuit de la-nceput și l-au urmărit cu dragoste.

Aceeași tendință se manifestă și la cititorii tineri contemporani care ori nu-l cunosc deloc ori îl cunosc prea puțin, din ultimele lui scrieri, de aceea nu-l prețuiesc cum se cuvine.

Slavici a fost cel mai de seamă produs pe care leagănul cultural al urbei de pe Mureș l-a dat literaturii române, el trăind într-o epocă de mari frământări sociale și politice, de puternic suflu revoluționar. Iar opera sa, dacă nu în totalitate, totuși în mare parte este o oglindă a principalelor aspecte ale vieții poporului din „btrul Carpaților”, al cărui exponent spiritual este.

La baza operei lui Slavici stă, ca de altfel la toți marii scriitori români, folclorul „acea nesecată fântână de apă vie, la care cată să se adape toți cei ce se simt ai acestui popor și ai acestui pământ”, cum spunea marele Sadoveanu, care-l dă posibilitatea scriitorului să se introducă în scrierile sale oralitatea populară înaintea lui Creangă.

Raportată la climatul literar transilvănean, opera lui Slavici se ivea pe cimpul arid al unei literaturi tributare latinistilor, care cultivau îndeosebi erudiția istorică și filologică și o limbă greoaie, abstractă. Aceasta a făcut ca povestirea ardeleană să apară relativ târziu: trei decenii au trebuit să treacă de la publicarea nuvelei „Alexandru Lăpușneanu” pînă la apariția primei „proze” transilvane valoroase „Popa Tanda”.

Dacă în Muntenia și Moldova întoarcerea spre literatură se produsese în jurul anului 1848, în Transilvania atinge punctul culminant în paginile „Tribunei” din Sibiu, condusă de Slavici.

Acestul „epos popular” se datorește în mare parte caracterul epic al literaturii ardeleni. Orientarea spre omul din popor susținută de Slavici are ca rezultat alăturarea de „idilic” și „mitologic” a „REALISMULUI POPORAL”, satul este văzut în toată complexitatea, cu dramele și tragediile lui.

Marele talent al lui Slavici s-a ilustrat în genuri literare numeroase: teatru, povestirea de sursă folclorică, nuvela, romanul, memorialistica. În ultimele trei, nu e nici o îndoială, a excelat.

Admirator al istoriei naționale și cunoscător al ei, (a predat acest obiect și a publicat manuale) el a scris romane istorice („Din bătrîni” 2 vol.) dar și romane pe teme contemporane, între care se impun „Cel din urmă armaș” și mai cu seamă „Mara”.

Este evident că Slavici n-avea orizontul lui Eminescu, de altfel greu de egalat. Dar în îndelungata-i viață, datorită unei chibzuințe remarcabile și unui spirit deosebit de ordonat și de sistematic, el și-a format o cultură enciclopedică. Autor de manuale și studii de istorie, gramatică, etică, estetică, sociologie, pedagogie, gazetare și polemist, traducător, cunoscător al citorva limbi (latină, italiană, franceză, germană, maghiară) Slavici se mișcă în vole în domenii largi și variate ale umanisticii. Întinsa-i operă atestă cunoașterea temeinică a filozofiei și literaturii antice, a renașterii și mai ales a filozofiei moderne, germane, în primul rînd. Slavici avea întinse cunoștințe despre filozofia și cultura Orientului, despre Iluministii francezi, literaturile germană și maghiară le stăpînea pe deplin. În domeniul literaturii române, pe care a studiat-o și a predat-o ani în sir ca profesor, s-a pronunțat întotdeauna cu competență și siguranță.

Observator tenace al realității, scriitor deprins să prezinte viața așa cum e, fără idealizări și înfrumusețări convenționale, văzînd în interesul economic mobilul esențial, factorul determinant al întregii existențe umane, așezînd în centrul narațiunilor oamenii care luptă pentru a trăi mai bine, cred că n-am greși considerîndu-l pe Slavici, un Balzac al satului românesc. Recrutați din straturile populare sau din stîlul burgheziei rurale ardeleni, eroii săi sînt oameni ambițioși, harnici, întreprinzători, răz-bătători, plini de vigoare, clocotitori de sănătate.

El diferă sub aspectul caracterologic de personajele altor scriitori de seamă contemporani lui Slavici, chiar dacă scopurile urmărite și de unii și de alții sînt aceleași.

Prin ascuțitul simț realist, Slavici a inaugurat în literatura neamului o puternică direcție, care atît prin el cît și prin continuatori de talia unui Rebreanu, Agârbiceanu sau a unor nuvelisti și romancieri din generațiile următoare — de la Pavel Dan și Al. Sahia la Titus Popovici și Ion Lăncrănjan — brăzdează adînc epica, pînă în zilele noastre.

Ionel Rațiu
cl. a XI-a E

Arad 1978 – Mari aniversări istorice

Anul acesta municipiul nostru este martorul aniversării a 60 de ani de la Unirea Transilvaniei cu România. Grandiosul act înscris acum șase decenii cu litere de aur în analele istoriei patriei este de fapt încununarea aspirațiilor de veacuri ale poporului nostru pentru eliberarea națională, rezultat al luptei duse de forțele social-politice ale vremii în cadrul cărora rolul hotărâtor l-au avut masele populare. Referindu-se la acest eveniment tovarășul Nicolae Ceaușescu aprecia că „Unirea din 1918 a reprezentat o adevărată piatră de hotar în dezvoltarea României moderne”. Propășirea social-economică și politică a României a fost întotdeauna concepută în legătură indisolubilă cu realizarea deplinei unități naționale.

Aradul a avut un rol de seamă în pregătirea mărețului act istoric de la 1 decembrie 1918. Fiind un vechi și important centru al luptei de eliberare socială și națională, având contacte directe cu România, aici au fost organizate actele și au fost luate deciziile importante care au dus la Adunarea Națională de la Alba Iulia, adunare care a hotărât în numele tuturor românilor din Transilvania unirea deplină și definitivă a acesteia cu România.

La Arad a fost sediul Consiliului Național Român Central, precum și Comandamentul suprem al gărzilor naționale alcătuite în scopul de a aplica hotărârile C.N.R.C.

În ziarul „Românul” din Arad s-au publicat cele mai importante documente ce au premers și pregătit Adunarea Națională de la Alba Iulia: „Către națiunea română”, „Convocarea Adunării de la Alba Iulia” și care promovau idei democratice și umanitare.

La 1 decembrie 1918, la Alba Iulia, arădenii au fost prezenți cu miile pentru a da glas năzuințelor de unire. Rezoluția Adunării care, referindu-se la românii din Transilvania, a decretat „unirea acelor români și a tuturor teritoriilor locuite de dânsii cu România” a fost prezentată de Vasile Goldis. În discursul rostit cu această ocazie acesta a evocat lupte înaintașilor, hotărârile luate pe Cîmpia Libertății în 1848 și a îndemnat „Să jurăm credință de aici înainte numai națiunii române, dar tot atunci să jurăm credință tare civilizațiunii umane”.

1978 marchează și împlinirea a 950 de ani de la atestarea documentară a orașului Arad.

Conjugând informațiile scrise cu cele arheologice acestea permit atestarea orașului Arad pentru anul 1028. În acest sens, cronicarul Anonymus situează voievodatul lui Glad pînă la Mureș, iar al lui Menemorut de la Mureș spre nord. Ahtum — urmașul lui Glad este autohton. Voievodatul său întins și în sudul și în nordul Mureșului cuprinde și teritoriul actualului județ Arad.

Cronica medievală „Legenda Sfîntului Gerard” — varianta Wion — descrie luptele dintre Ahtum și Cenad care în 1028 s-au desfășurat în zona Aradului. În această cronică — varianta A. Wion — apare și toponimul „Arasinus” pe care unii istorici din sec. XVIII și chiar XIX îl consideră sinonim cu Aradul.

Dovezile arheologice la rîndul lor, confirmă că luptele desfășurate în 1028, între Ahtum și Cenad s-au petrecut în zona Aradului.

Tot în acest an — 1978 — se vor sărbători și 2000 de ani de la atestarea cetății dacice Ziridava din zona Aradului, a cărei prezență, în sec. I î.e.n., este confirmată atât de izvoare scrise, cît și de un bogat și valoros material arheologic.

Astfel, în izvoarele scrise, existența acestei așezări este menționată în Geografia lui Ptolemeu. În lucrarea sa, între „cele mai însemnate orașe din Dacia” pe locul al 18-lea din cele 44, eruditul geograf al antichității indică orașul, polisul, cetatea Ziridava. Coordonatele pe care ni le dă Ptolemeu în legătură cu Ziridava, arată că ea

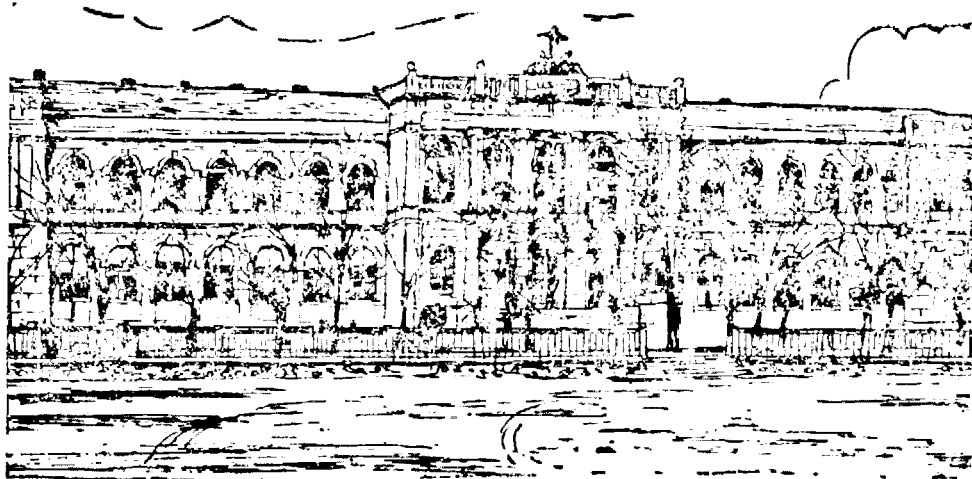
era centrul zonei dacice ce cuprindea toată valea Mureșului inferior, deci și zona municipiului Arad, că cetatea dacică Ziridava era la vremea ei, la cerințele de atunci centrul economic și politic al acestor meleaguri, așa cum este astăzi la cerințele vremurilor noastre municipiul Arad pentru aceeași zonă. Informațiile pe care ni le dă Ptolemeu, se referă la perioada dinaintea cuceririi Daciei de către romani, mai precis la perioada regelui dac Burebista, din sec. I î.e.n.

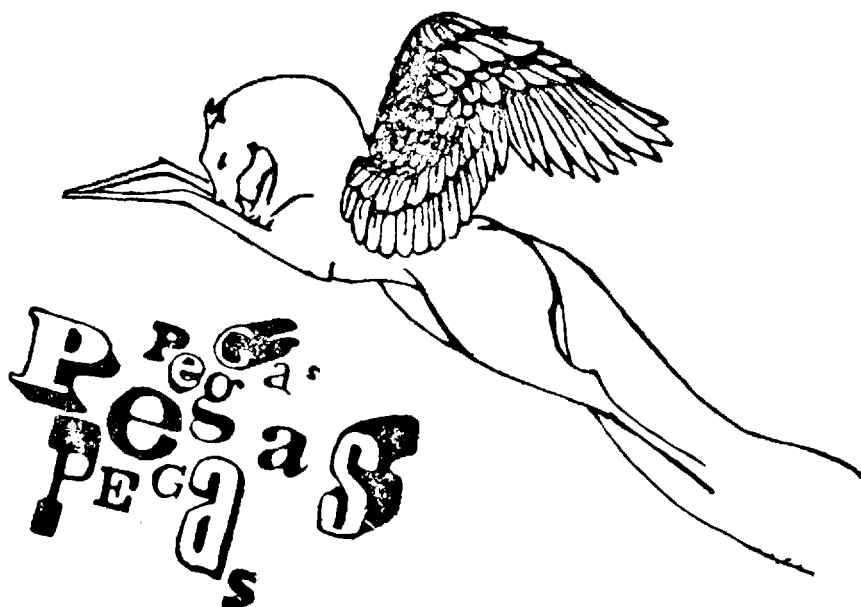
Cercetările arheologice și studiile efectuate pe baza materialului rezultat (ceramică, obiecte de podoubă, unelte, etc.) confirmă cu rigurozitate științifică existența cetății dacice în sec. I î.e.n. și permit concluzia științifică și obiectivă că cetatea dacică Ziridava poate fi localizată la „Șanțul Mare” spre vest, nu departe de Arad.

Aniversarea acestor mari evenimente ne dau posibilitatea să reținem trecutul istoric al meleagurilor noastre dezvoltându-ne sentimentele de mândrie față de faptele înaintașilor noștri, mobilizându-ne în același timp la dobândirea de noi succese în opera de construire a socialismului pentru că așa cum spunea tovarășul Nicolae Ceaușescu la Congresul Educației Politice și al Culturii socialiste — „Dezvoltând recunoștința și prețuirea față de strămoși care cu sacrificii și jertfe uriașe, au apărut ființa națională a poporului, au purtat steagul luptei pentru libertate și neatințare pentru dreptate națională și socială, trebuie să sădim în conștiința oamenilor sentimentul răspunderii față de moștenirea înaintașilor, al hotărârii de a duce mai departe în noile condiții istorice făclia progresului și civilizației pe pământul României”.

Julieta Țurcanu

cl. XII. D





P A T R I E

Mă opresc să-mi astup urechile cu un pumn de țărină
din pîntecul acesta îmbibat cu seva seminței noastre
și-ncerc să-i ascult pulsul, cu fiecare bătaie
emanînd cuvintele timpului.

Ascult și urmăresc cu palma fiecare loc amintit
Și fiecare palmă de loc înseamnă vibrație,
înseamnă sufletul doinei aprins seara în munți,
înseamnă rafale amplificate-n victorii,
și-nseamnă morminte, dar fără morți
Noi n-avem morți, căci ei trăiesc
în noi și-n alții cu care-avem comun
aceste palme de loc
însemnînd viață
și patrie.

Și dacă ar fi să număr cuvintele timpului,
n-aș face-o cu cifre romane
și n-aș face-o cu cifre arabe,
aș scrie cu cifre române, cu cifrele noastre de oameni.
Și care sînt cifrele noastre? — sînt Decebal
Și care sînt cifrele noastre? — sînt Mircea
Și care sînt cifrele noastre? — sînt Ștefan
Și care sînt cifrele noastre? — sînt Mihai
Și care sînt cifrele noastre? — sînt Bălcescu
Și care sînt cifrele noastre? — sînt Cuza
Și ei vor fi cît vom avea comun
aceste palme de loc
însemnînd viață
și patrie.

Cornelia Tămaș
cl. a X-a A

Unde sînt?

Poate că exist într-o petală
îndrăgostită de-o rază de lumină,
Încercînd
să urc pînă-n inima albastrului.
Sau poate sînt doar un fluture
care vede amurgul
și aleargă nebun de libertate.
Dar nu, nu sînt nimic din toate acestea.
Eu sînt aici,
în ultimul pumn de nisip
din clepsidra florilor...
Și timpul zăbovește...
nehotărît. Încă!

Ada Mănescu

cl. a X-a E

Cîntec

Au venit așa prin surprindere
pe sub gîndurile care năvălesc
lăsînd în seara făr' de lună
fantome de formă crepusculară.
Sînt lăutari ai minții
ce încep să doinească
iar melodia lor
îmi descrie forma chipului tău
ochii, buzele, părul
cînd melodia a pătruns
în labirintul gîndurilor
erai lingă mine, în mine
iar ciudatele ființe plîngeau
de noaptea întinsă pe iarbă
pînă ce tăcuți au plecat
lăsînd atîrnate de lună
instrumentele bizare.

Ion Mihuț

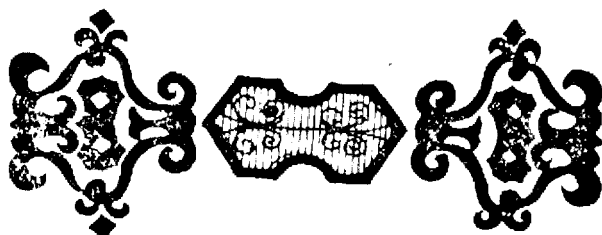
cl. a XIII-a seral

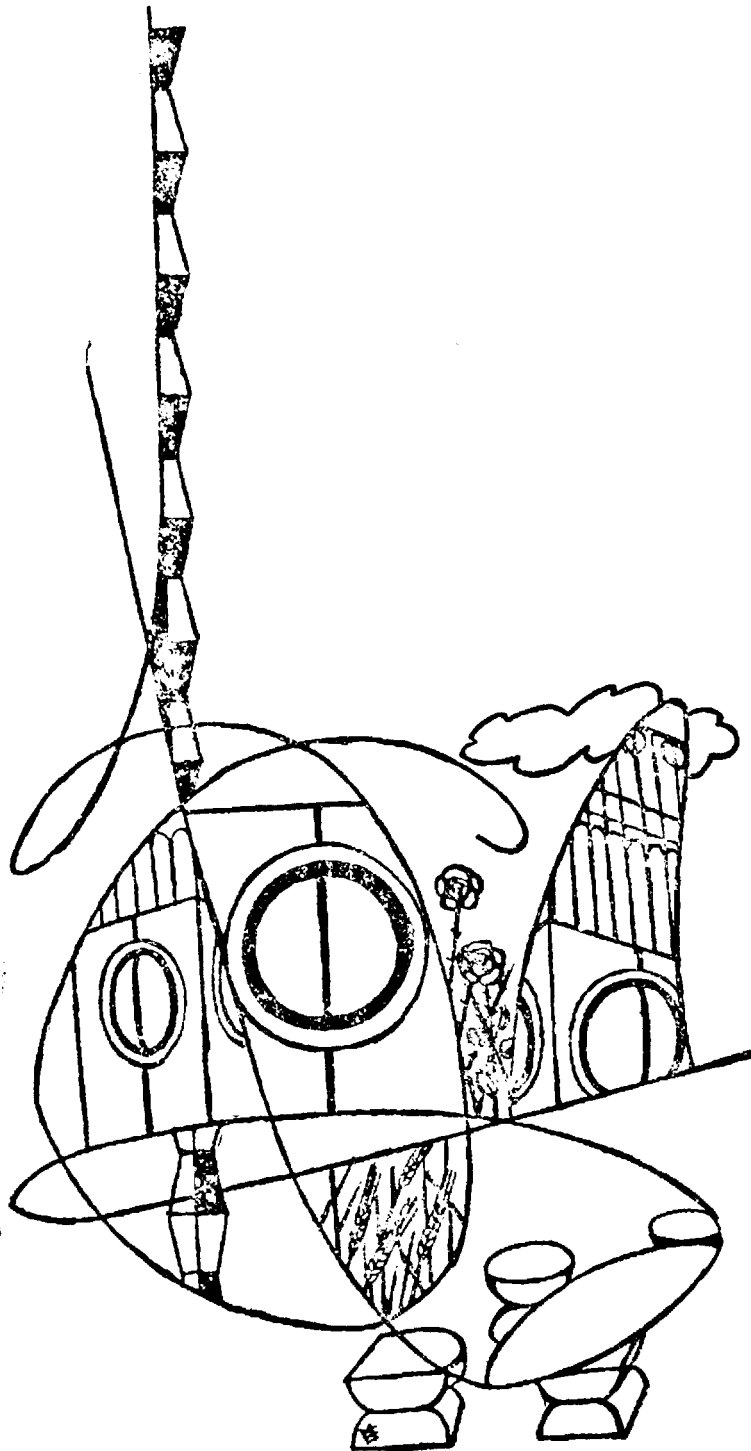
Ar trebui

Ar trebui să punem buzelor
lacăt, iar ochii să fi clădim
pe ruinele inchipuirii,
Ar trebui să înființăm un cîmîtir
al legendelor moarte
unde carnea își numără
rănile,
iar rîul devine epopee
a drumului fără replică
și unde infinitul își bate joc
de munții ce refuză
să fie munți.
Din care muzică ne tragem
seva existenței, din ce loc
răsună porțile însingurării
în noaptea fără epilog?
Răspunde, singe al trecutului.

Ion Mihuț

cl. a XIII-a seral





Primăvara unui geniu

sculptorului C. Brâncuși

Primăvara,
florile se nasc spre cer
cu supliciu în priviri,
cu dragoste în sevă,
cu rugăciunea în petale,
cu sărutul în polen.

Primăvara,
geniul privește
mișcarea străvezie a pietrei
pentru a clădi
din sufletul ei,
o infinită poartă a sărutului.

Călin Man
cl. a X-a E

Lan de grâu

Un lan de grâu
se va naște
de sub zăpada sufletului meu.
Soarele, sînt sigur,
își va da toată lumina
pentru rodul mîinii.
Din lanul ce va naște,
voi face o pline
pentru toată lumea.
Iar din izvorul
ce curge din mîna mea,
voi face o fîntînă.

Călin Man
cl. a X-a E

Clipa

Tîrziu... cînd ciocîrlia îmbătăită
de soare, cade rotindu-se,
Orga pămîntului urcă pînă-n singe
cîntîndu-i recviemul.
Acea e clipa ce se dilată
între două hotare.
Ciocîrlia mută, păstrînd pe aripi
sărutul de foc al LUMINII,
se-ntoarce... să moară
pe buzele profundei orgi
a pămîntului.

Ada Mănescu
cl. aX-a E



Balada lui

CIPRIAN

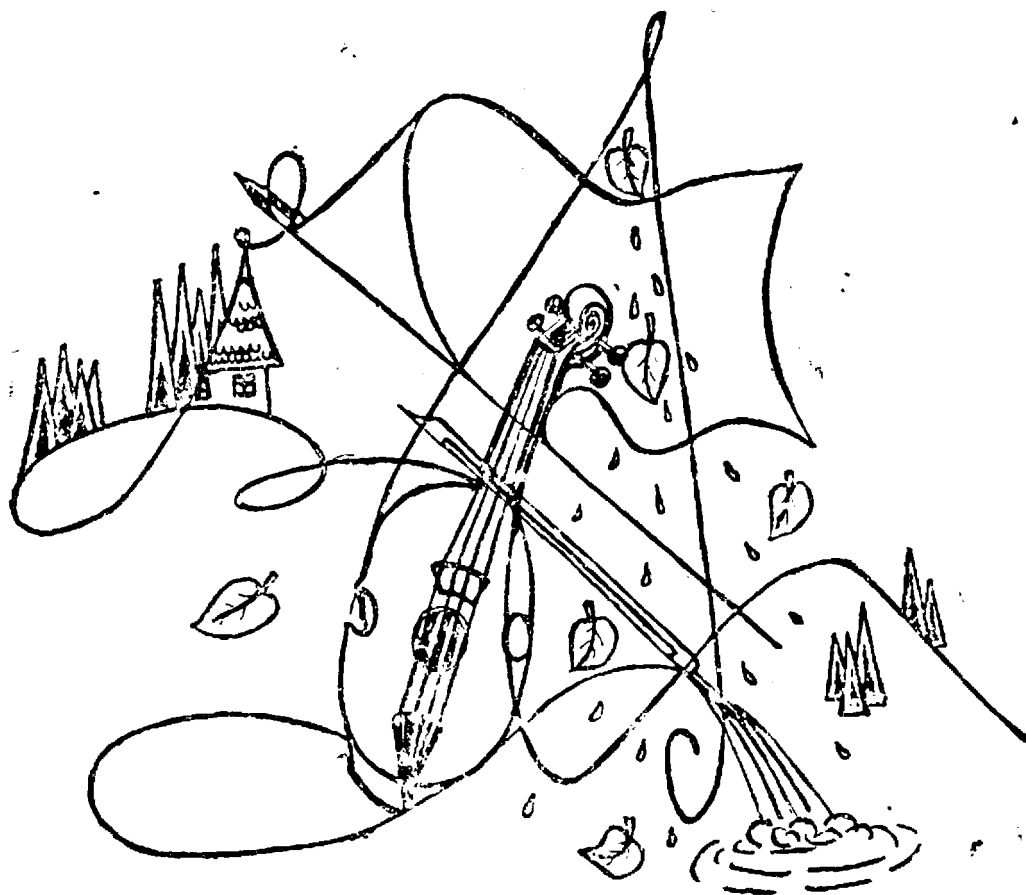
PORUMBESCU

Au secat apele lacului Dunării
Și-atunci, lacrimile notelor au picurat,
Umplându-l din nou.

Murmur de brazi, șopot de ape,
Geamăt ce-și are izvorul în vînt tumultos
Al ființei umane.
Inimă sfîrtecă, prea mică în ghiarele tristeții,
Ecouri sumbre ale sufletului singur, părăsit
În cascada vieții.

Farmecul arcușului dănuind pe corzile viorii,
Pe-un picior de plai, în decor de Mioriță
Descîntec și alint de sunete...
Și-o frunte albă ca o coală ne-ncepută,
Aplecată deasupra portativelor pline de note
Își cîntă visul și dorurile pe strune de Baladă.

Carmen Stingu
cl. a X-a C



Obârșie

Iubesc
Noaptea cu lună plină
Și chipul țării mele
Ogândit în apa lină
Și glia-cîmpia
Udată de sînge și timp;

Acest pămînt — de cînt,
E patria ce m-alintă în vînt,
E sufletul de pămînt sfînt,
E o voință de neînfrînt.

Puiu Nedea
cl. a XII-a B seral



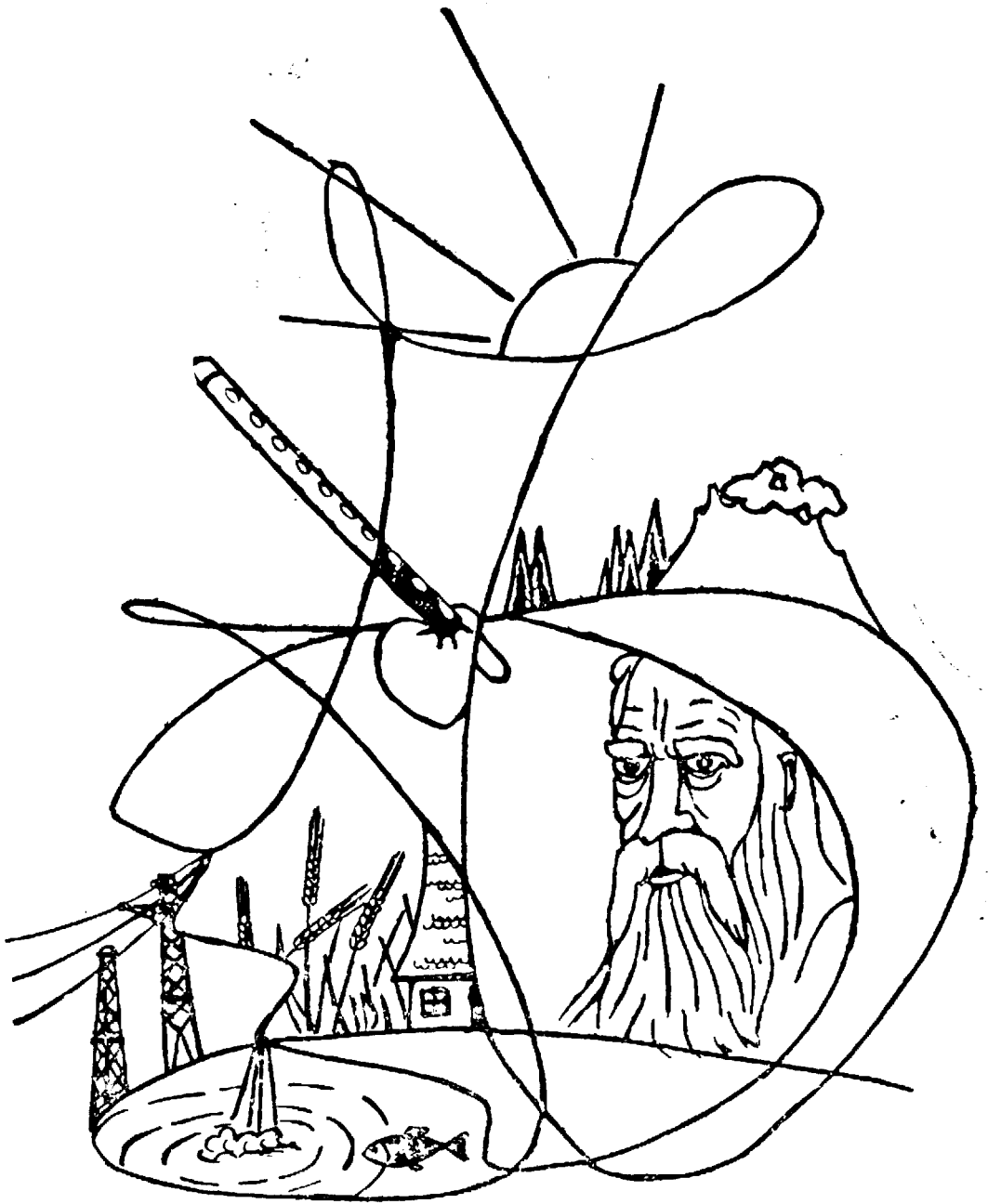
Cîntec de toamnă

Frunzele știu
să moară
cel mai frumos.

Cînd le-a venit ceasul,
își îmbracă
cele mai frumoase culori
și alunecă
în prăpastia timpului.

Într-o liniște imensă,
frunzele își apleacă
vene uscate
peste viața ce-a trecut,
iar din bătrîna sevă
se vor naște fructele vieții
Frunzele știu să trăiască
cel mai frumos.

Călin Man
cl. a X-a E



B A S M

„A fost odată ca niciodată un bătrîn, mai bătrîn ca basmul, mai bătrîn ca vremea”

(Basm ardelenesc)

La capătul lumii, lîngă o cruce bătrînă sau poate piatră de hotar, un moș alb de zile povestea lumii...

La început a fost pămîntul sec și uscat. Gemea în el dorința de viață. S-a crăpat apoi cu uruit de stînci și volbură de ape să lase loc seminței dornice de a fi. Poate s-a născut verdele din sudoarea lui sau poate albastrul. Tot ce știu e că roșul a venit cu țipăt de prunc în leagăn și din zimbetul lui au pornit să înflorească zilele, una cite una.

La leagănul primului sosit n-au cîntat ursitoarele. Lui i-au ursit culorile: albastrul că va să fie fericit, verdele că va să fie Făt Frumos, negrul că va să fie și cenușă...

În prima zi, copilul acestui pămînt a învățat să cînte din fluier, un fluier lung de os cu douăsprezece găuri. Cîte una pentru fiecare ceas să-și cînte cu el răsăritul, amiaza, apusul și dorurile. Un fluier lung de suflet, cu douăsprezece găuri. Cîte una pentru fiecare dor să-și cînte cu el dorul de oameni, dorul de dragoste, dorul de dor.

Vîntul a venit mai tirziu, să poarte sămînța rodnică pentru singurul fiu al pămîntului. A bătut mai întîi ca o boare, așa încet, ca o părere, să spulbere mai apoi cu colți de crivăț, alb mult și rece. Prima iarnă.

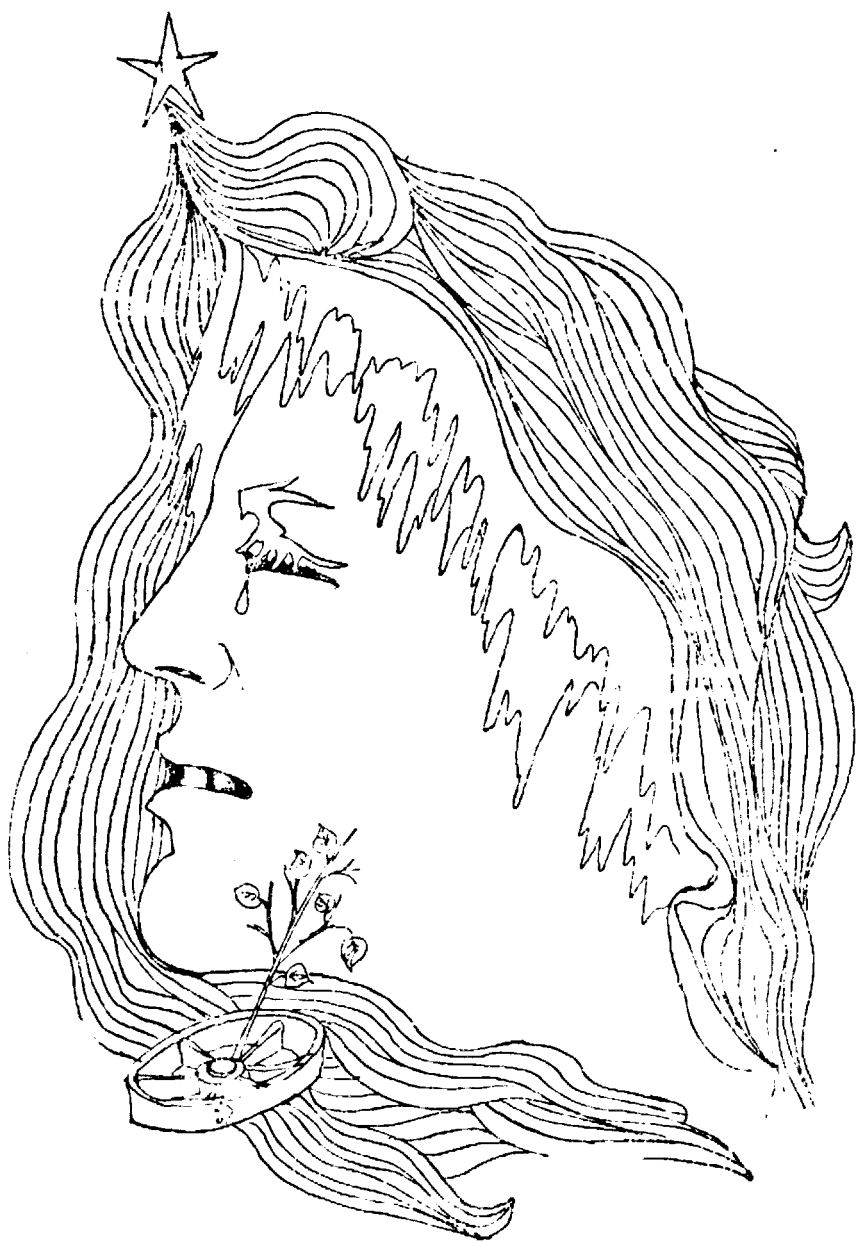
A urmat apoi cenușa și cuțitul ce va să fie sînge, căci semințele vîntului au rodit multe, cită frunză și iarbă. Erau acum și lupii pe pămînt, să sfîrtece cu colții lor toate dorurile primului venit.

Dar el a zidit cetate plămădită cu sudoare și bolovani, unul lîngă altul, bine legați să apere de colți toate frumusețile pămîntului. Și Făt-Frumos-Fără-Nume luă cu el în cetate fluierul, dorurile, cîte unul pentru fiecare zi a anului, un pumn de semințe și un căuș de apă rece. Poate așa s-a născut legenda. Sau poate așa s-a născut istoria. Într-o cetate de bolovani, legați strîns cu sudoare, într-o cetate unde au rodit un pumn de semințe udate cu un căuș de apă, într-o cetate unde fluierul cîntă dorurile și doinele, odată pentru fiecare zi a anului.

Lucia Crăciun
cl. a XII-a B



GHINION

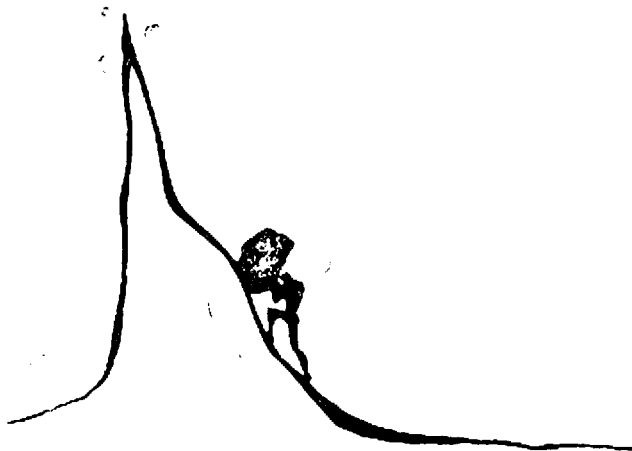


Regăsire incertă

Regăsire incertă

În fiecare zi
Cînd zboară o frunză,
Suspină un gînd...
 Simt că mor
 cite puţin în tine-taină a liniştii mele.
În păsări aud
paşi plutind...
paşi sufletelor noastre
în care continuăm, continuăm
 Să ne căutăm
 Zimbetul...

Puiu Nedea
cl. a XII-a B seral



Singurătate

Departă,
Te aud mereu
În gînduri
Şi-n frunzele ce se scutură.

Puiu Nedea
cl. a XII-a B seral

DIN ACTIVITATEA CERCURILOR PE OBIECTE

GOGA, poet al pătimirii noastre

„Al vostru-i plînsul stranei mele...”

Literatura română, strîns legată de istoria poporului, a avut şansa ca-n fiecare moment de răscruce în viaţa acestuia, să se ridice din mulţime cîte o voce genială care să cînte durerea, revolta şi speranţele celor mulţi.

Astfel a fost Alecsandri, cîntăreţul luptei poporului pentru independenţă, astfel a fost Coşbuc, „poetul ţărănimii” şi astfel a fost Eminescu, cînd, prezentînd chipul proletariatului, îndemna la luptă socială, intuind viitorul luminos al dulcii sale Români:

**„Ce-ţi doresc eu ţie, dulce Românie,
Ţara mea de glorie, ţara mea de dor?
Braţele nervoase, arma de tărie,
La trecutu-ţi mare, mare viitor!”**

Astfel de poet născut în ceasul greu al robirii poporului român din Transilvania de către imperiul habsburgic, a fost Octavian Goga. Pe firmamentul luminos al literaturii române, steaua lui s-a înălţat întru gloria poporului, urcînd spre cele mai înalte culmi ale artei „cîntarea pătimirii noastre”. Renunţînd la propriile dureri, Goga a cîntat durerea unui neam oprosit, versul său devenind o armă de luptă şi un îndemn la rezistenţă şi speranţă:

**„Sînt cîntăreţul celor fără nume,
Un strigăt smuls de-a vremilor viltoare
Din viforul durerilor din lume.
Mult tăinuita firii îndrumare
M-a plămădit din ură şi iubire,
Mi-a dat durerea lumii moştenire,
Amarul ei să-l ocrotesc pe strune.”**

Durerea lumii în care s-a născut, poetul a simţit-o de mic copil, de pe cînd ră-tăcea pe uliţi sărace cu colb alb şi zărea doar chipuri îndurerate şi aspre, în ochii că-rora licăreau lacrimile alături de jarul lăuntric al speranţei şi de scînteia neliniştită a revoltei înăbuşite. Astfel a putut adesea să audă doina de jale a unui popor - ce-şi plîngea măreţia apusă şi umilînţa prezentului. Şi cînd plînge un om, durerea născută astfel se poate stinge şi oricît de adîncă se poate alina, în rana unui suflet ce lesne o acoperă uitarea, dar cînd plînge un popor, durerea lui nimeni n-o poate înăbuşi, ni-mic nu-i aduce alinarea şi rana-i se vindecă doar prin luptă şi răzbunare. Iar rana poporului român era cruntă şi dureroasă, provocată de muşcătura înveninantă a pa-jurei habsburgice, monstru cu două capete:

**„Ca un blestem de cununie
Ne stă pierzarea ta-n pervaz
Şi gheara ta de veci ne scrie
Ruşinarea vieţii pe obraz;
Căci n-are iadul vreun balaur
Mai rău şi mai înfometat,
Să ceară sînge-atît şi aur
Cît bietul meu pămînt ţi-a dat.”**

Sub umbra aripilor ei negre, gema un popor înstrăinat pe propria-i moșie, popor fără bucurii și fără sărbători, sărbătorile lui fiind pline de durere și de amărăciune... În serile de iarnă, la ferestrele satului transilvănean răsună o colindă ciudată, ce-afiora aerul în tremur de lacrimi:

Moș Crăciun, Moș Crăciun!
La casa de om sărac
S-a gătat făina-n sac
Și n-avem să-ți dăm colac...
Moș Crăciun!

.....

Moș Crăciun, Moș Crăciun!
Slujim slujba satului,
Țarina bogatului,
Pajura-mpăratului...
Moș Crăciun!"

Și ascultând aceste colinzi îndurerate, împreună cu doinele de jale în care tremura plînsul tuturor și al fiecăruia în parte, Goga și-a instrănat lira după suspinele lor, conștient că menirea lui de poet este ridicarea neamului, sădirea speranțelor în suflete și a luminilor minții pe frunzi, precum și semănarea revoltei în inimi; năzuind să devină glasul mulțimii, poetul nu cerea în parte nimica pentru el, ci doar puterea de a-și lepăda patimile și durerile proprii și a-și pătrunde sufletul de durerile mulțimii:

„Alungă patimile mele,
Pe veci strigarea lor o frînge,
Și de durerea altor inimi
Învăță-mă pe mine-a plînge.
Nu rostul meu, de-a pururi pradă
Ursitei măstere și rele,
Ci jalea unei lumi, părinte,
Să plîngă-n lacrimile mele.”

Și gîndul lui, așa cum l-a dorit, s-a înălțat limpede și profund, Goga a reușit să cuprindă în versurile sale toate durerile transilvănenilor, apăsăți de cruntul jug habsburgic. Viața lor grea era recunoscută pînă și de maghiari, iar străinilor le era clar că poporul român nu va răbda prea mult jugul asupririi austro-ungare și că momentul unirii lor cu țara nu putea întârzia prea mult. Și era firesc ca acest popor de eroi, avînd încă vii în minte figurile marilor înaintași, să nu se lase umilit și asuprit; Goga știa că e deajuns ca o voce puternică să se înalțe, să reînvie amintirea vremurilor de glorie și să rostească răspicat cuvîntul „luptă”, pentru ca forța latentă a miilor de români să se unifice și să izbutească. Și vocea aceea a înălțat-o Goga; poezia lui întregă e un strigăt de chemare la deșteptare, o trîmbiță de alarmă. Poetul chema ca martori al prezentului pe vechii eroi și dezvălula în fața lor greutatea și umilința clipei. Titanul Ștefan e chemat din neguri de istorie să vadă viața grea a urmașilor săi și să le renască speranțele:

„Măria-ta! Suntem bătuți de nevoii
La noi în zadar ară plugul,
Căci holdelor noastre cu spicul de aur
Străinul le fură belsugul.
Am vrea să purcedem cu jertfele laudel,
Dar n-avem nimica la casă...
Măria-ta! Toate străinii la duc,
Și numai cu lacrimi ne lasă!”

Dar nădejdea într-un viitor mai bun nu se sprijină numai pe amintirea vechilor vremuri de glorie nici pe speranțele deșarte într-o minune a istoriei; exista o forță ce era în stare să revoluționeze lumea, să răstoarne crugul istoriei, și această forță o reprezenta mulțimea truditorilor de pe ogoare, ei „cel mai buni copii ai firii, /urziți din lacrimi și sudoare”/:

„La voi aleargă totdeauna
Truditul-mi suflet să se-nchine;
Voi singuri străjuiți altarul

Nădejdi noastre de mai bine.

 Din casa voastră unde-n umbră
 Pling doinele și rîde hora,
 Va străluci odată vremii
 Norocul nostru, — al tuturor!"

Poporul acesta era neînfînt, pentru că în cele mai grele condiții, cînd jugul a-suprîrii sociale și naționale le apăsa mai greu grumajii, ei nutreau și încălzeau în suflet cel mai luminos ideal de libertate și neatinare, așa cum țărîna romîncă grijea cu greu, la marginea țîrîinii pe care trudea fătul bălan ce întruchipa nădejdea vremii viitoare:

„El, cel frumos și frate bun cu glia,
 Nou întrupatul suflet de Mesia,
 Va fi județul ceasului de mîine,
 Ce-ntr-un zorit aprins de dîmîneacă,
 Cu mina lui vitează, îndrăzneacă,
 Zdrobi-va cartea legilor bătrîne."

Încrezător în puterea acestui ideal, Goga l-a cîntat cu toată puterea și sinceritatea versului său. De-a lungul întregii sale vieți, poetul nu s-a îndoit nici o clipă de justetea previziunilor sale și n-a pregetat să dezvăluie adevărurile crunte ale vieții neamului său așa cum erau. Pentru asta a și pătimit mult în viață, cunoscînd represiunile unui sistem social obtuz și tiranic, dar a avut și suprema satisfacție de a se vedea ascultat și înțeles de popor prin versul său, manifest ce a înflăcărat sufletele romînilor asupriți. Poezia lui Goga a fost un vultur cu aripile întinse, planînd spre culmile eliberate de furtuni și despîcînd cu pieptul norii vrăjmași și întunecați, pentru a deschide drum de lumină spre viitor, poporului său. Iar poetul a fost un Mesia al romînilor, ce a uitat de sine și s-a pătruns de durerile altora, durerile poporului iubit, ce l-a urmat:

„Pe urma lui creștea popor,
 Și se ruga cu chip duios:
 Mai spune-ne cite ne dor,
 Și cite sufletul ne-au ros,
 Pribeagule stihurilor,
 Le plîngi atîta de frumos!

El, ascultînd al lor cuvînt,
 A chibzuit și-a priceput
 Că pururi fără crezămînt
 Durerea lui l-a petrecut,
 Și că-n sălbaticu-i avînt
 Străine doruri l-au durut..."

Dar niciodată în versul lui Goga nu transpare regretul pentru durerile lui închise în suflet, în timp ce cînta și simțea durerile mult mai adînci ale poporului său; Goga a fost, în mod conștient, un poet-profet, un mare iubitor al neamului și în acest sens scrie Eugen Lovinescu în „Critice”: „Pînă acum n-am fost deprinși cu astfel de accente puternice, nu numai de poet, ci și de profet. O. Goga e poet în deplinul înțeles al cuvîntului antic „vates” care îl avea și pe cel de profet. Adevăratul profet e cel ce așteaptă o zi de sărbătoare pentru națiunea sa subjugată, oțelînd inimile la luptă și sădînd nădejdea în suflet, el e fiul pămîntului, care fură scînteia divină din cer și o aduce oamenilor — speranța! În sufletul lui e focarul în care se resfrînge durerea unui neam întreg. În vacea lui răsună strigătele a milioane de piepturi, ce cer dreptate și răzbunare. Și această slujbă de preot al mulțimii robite, D. Goga o face cu întreaga conștiință a menirii sale”.

Mariana Turda
 cl. a XI-a A

„SOMNUL DIN SOMN” de Ana Blandiana

„Poezia nu este povestea vieții pe care o trăiești ci aura, aburul care-ți rămîne după ce ai reușit să uiți ce-ai trăit.”

(Ana Blandiana — Eu scriu, tu scrii, el, ea scrie)

Ana Blandiana aparține acelei categorii de poeți care spun totul despre ei într-o singură poezie. Este suficient să citești o poezie de-a ei, oricare ar fi aceasta, pentru a-ți da seamă de extraordinara sensibilitate a poetei, de atmosfera de puritate care o înconjoară. Mulți poeți CAUTĂ să fie sau să pară sensibili dar, așa cum spunea Ana Blandiana în același volum:

„Sensibilitatea nu poți s-o deprinzi, poți cel mult, să te deprinzi cu ea”, și „Poezia nu sensibilizează decît pe cei sensibili”.

Întreaga ei operă te captează, te atrage într-o lume parcă ireală (de fapt este tot cea înconjurătoare, dar privită printr-o altă prismă), unde totul este frumos și pur.

Unul dintre motivele preferate ale poetei, — motiv prezent într-un mare număr de poezii din volumul „Somnul din somn” — este iarna, poate tocmai datorită faptului că albul zăpezii sugerează simplitate, gingașie, delicatețe („Păstor de fulgi”, „Ninge”, „Ca și cum luna”).

Aparent paradoxal, putem asocia aceste poezii cu cele în care apare motivul fluturilor și păsărilor („Aripi”, „O biserică plină de fluturi”, „Mare”, „De ce?”).

În fiecare vers, în fiecare silabă, chiar în fiecare literă, Ana Blandiana pune o parte din sufletul ei și ai senzația, cînd îi citești opera, că aceste părți au fost rupte doar pentru că altfel întregul n-ar mai fi putut exista:

„Numai cu mine
Și-atît de-mpăcată
Sub soarele ultim,
Aproape stins, al livezii,
Încît pot să aud
Culorile-n frunze curgînd
Și îfșitul ușor
Al norilor fragezi.
Numai cu mine.
Ce liniște bună.
N-am nimica să-mi spun.”

(„Numai cu mine”)

Poezia cu caracter patriotic nu emană un aer de poezie scrisă forțat. Totul e atît de firesc, spus cu atîta convingere, face parte integrantă din autoarea însăși. Un exemplu edificator în acest sens este poezia „Avram Iancu”:

„Dormind înaintează cîntînd din fluier stins
Învinsul crai al suferinței noastre,
În urma lui cresc codri mari de plîns
Și hohotesc nemuritor dezastre.

Dar dorm în albi rîuri și frunzele-n păduri,
O țară-ntreagă transhumată-n vis,
Pe cînd măritu-i rege cu ochi deschiși și suri,
Dormind înaintează cîntînd din fluier stins.”

Însă și celelalte poezii („Țara”, „Acoperită de rouă”, „În sufletul țării”, „Pastel”, „Țara de păsări”) deșteaptă în noi sentimente de profund patriotism, cu atît mai mult cu cît nota lor dominantă este sinceritatea.

Titlul volumului sugerează motivul cel mai des întîlnit pe parcursul său: motivul oboselei, al nevoii de odihnă. Ceea ce întîlnim nou în poeziile acestea este osteneala poetei, care provine din înțelegerea faptului că lumea și oamenii rămîn așa cum sînt, oricîte eforturi ar face ea pentru purificarea lor (vezi „Elegie de dimineață”, într-un volum anterior.)

Citind poeziile Anei Blandiana, ești captivat de imensa ei putere de a-și dezvălui sufletul și acesta este în fond unul din lucrurile cele mai importante care concură la succesul unui poet.

Mirela Silvia Turc
cl. a XII-a D

„Note pentru o singurătate“

„Realul ne condamnă să ne tirăm
Sub poemele noastre
Noi, mai mici decât noi înșine“

Alain Bosquet se relevă ca un poet esențialmente contemporan, prezent la micile și marile probleme ale omenirii. Volumul „Note pentru o singurătate“ (Volum ce cuprinde și „Note pentru un plural“ și „Note pentru un amor“) dezvăluie un poet „sufletist“, convins că ne vom regăsi ca oameni doar căutându-ne în noi înșine.

„Ah, de și-ar putea preface carnea în manuscris
Și să-și recitească viața ca s-o respire mai bine.“

Ceea ce aduce nou acest volum este simplitatea versului și a gândului (să nu uităm că Alain Bosquet a început prin a scrie poezie suprarealistă).

Sînt multe ființe minunate pe lângă care trecem zi de zi, și pe care le ignorăm, ajungînd să le uităm cu totul, ființe pe care poetul le plînge, le caută și le regăsește mereu mai greu.

„Nu mai e nimeni,
Brazi îndoliați
Nu mai e nimeni,
Munți fără păsări.“

Alain Bosquet se regăsește cu greu în mijlocul orașelor gigant, în mijlocul roboților și al calculatoarelor, pe șoselele enorme și cenușii: Replica lui este o tristă ironie:

„Se fabricau păsări mari
Le inventa gustul omului.“

Și poate una dintre cele mai frumoase poezii:

„Un stejar era gata să-și aducă aminte
O colină visa multe vise
Un fluviu iubea inserarea
Mai tare decât e voie să iubești.
Flăcările sale temătoare
Luminarea își povestea copilăria
Un lac avea numeroase inimi.
Pur și simplu, pe stradă
Un afiș foarte verde
Nu accepta să moară.
Mai sensibili ca noi“

Ilustrează tocmai teama alienării omului, teama pe care poetul nu și-o ascunde.

Încercînd să redevenim copii puri, adolescenți, vom mai regăsi puterea să fim noi înșine?

„Dacă ai trece astă seară
pe lângă tine, adolescenta de odinioară,
oare ai mai fi în stare să te recunoști
și să-ți ceri preluarea suspinului?“
e trist dar foarte adevărat.
„Nu trebuia să-ți aduci aminte de tine“.

Vrînd să mergem înainte, ucidem tot ce e bun și frumos alături de noi, sacrificăm adevărata artă în numele unui ideal ce nu ne justifică:

„Ultimatum păsărilor bătrîne:
noi sîntem cei ce vom zbura pînă la stele
Ordin bătrînilor copaci
să își aleagă modul de sinucidere
Noi sîntem cei ce vom înflori prin
mii de flori sîngerinde.“

Îndepărtându-ne de viață pierdem obișnuința celor mai simple și frumoase gesturi:

„Atît de tăcuți,
încît ne pierdem obișnuința
celor mai simple cuvinte:
„dragoste”, „liliac”, „zăpadă”, „prietenie”.
Atît de singuri”.

Și verbul iubirii rămîne conjugat, ce trist, mereu la trecut:

„Îți amintești un fel de cîntec
Era, era...
Îți amintești un fel de uitare
Era, era...”

Și pentru că autostrăzile civilizației duc toate numai înainte spre viitorul îndepărtării noastre de noi, poetul vede sfîrșitul trist:

„Ordinatorul Mozart
ne va învăța cum trebuie să fie muzica,
Ordinatorul Vermer
ne va da lecții de pictură
Ordinatorul Rimbaud
Va șterge toate poemele noastre.”

Lucia Crăciun
cl. a XII-a B

Recreere prin activități creatoare

Tabăra cu profil de biologie de la Geoagiu-Băi, din perioada 3—9 ianuarie 1978, a constituit pentru elevii care au înclinații pentru această știință, un prilej de consolidare a cunoștințelor acumulate de-a lungul anilor, aplicîndu-le în activități practice, de teren, sub supravegherea cadrelor didactice, profesori de biologie și geografie.

Inițiată de către Inspectoratul școlar, tabăra de biologie a urmărit familiarizarea elevilor cu natura, formarea deprinderii de a cerceta, cit și dezvoltarea dragostei și a convingerilor necesității de a ocroti frumusețile și raritățile naturale, în general mediul ambiant al omului.

Timp de o săptămînă, tabăra a găzduit aproape o sută de elevi din municipiul și județul nostru, care sub îndrumarea cadrelor didactice au desfășurat un program echilibrat de cunoaștere a naturii specifice vieții plantelor și animalelor în sezonul de iarnă. Alături de activitățile rezervate pregătirii pentru olimpiada de biologie, au organizat drumeții în munții din împrejurimile stațiunii Geoagiu-Băi.

Printre alte obiective vizitate de viitorii biologi, a fost și complexul carstic din localitatea Ardeu. Călăuziți de tovarășii profesori, elevii au pătruns în tainele fenomenelor carstice, formarea grotelor din masivele stîlcoase, precum și a coloanelor de calcar care înconjurau un platou, dîndu-i aspectul unei fortărețe. Pe măsură ce înaintau spre înălțimi, tinerii excursioniști descopereau noi aspecte ale faunei și florei specifice acelor meleaguri. Liniștea deplină era întreruptă din cînd în cînd de țipetele răpitoarelor de zi și de noapte: uli, păsărari, bufnițe.

Un tablou impresionant oferea satul Ardeu, privit de pe înălțimi: așezarea sa pitorească în terase folosite pentru agricultură, panglica argintie a riului care se tira leneș cu multe meandre. Totul părea căzut în amănzi, în sat nu se vedea nici o mișcare, datorită gerului mare care ținea oamenii în casele lor. O pătură groasă de zăpadă care acoperea casele, copacii și pămîntul înghețat, strălucea în bătaia soarelui rece de iarnă.

Explicațiile tovarășilor profesori au fost binevenite, elevii putînd să-și explice prezența diferitelor plante și animale în preajma complexului de peșteri.

Pe terenul arid și stîncos al Ardeului, flora era reprezentată de tufe de sînger, păducel, soc și porumbăr, iar dintre plantele ierboase am întîlnit chiar în timpul iernii, pe stîncile calcaroase, alături de diferite specii de mușchi, specii de plante suculente și

cărnoase adaptate la secetă: urechiușă, soxifragă, iarbă grasă etc. Desigur, pe stîncile calcaroase s-au putut vedea numeroase specii de licheni. Reprezentanții faunei specifice erau răpitoarele, menționate mai sus și iepurii ale căror urme s-au putut observa foarte bine pe zăpadă.

Drumul era din ce în ce mai anevoios, plin de mărăcinii și grohotișuri, dar curînd, micul grup și-a atins ținta: un pod suspendat de piatră, deasupra unei cavități. Era de fapt tavanul prăbușit al unei peșteri. De acolo, de sus, priveliștea era impresionantă: o panoramă în sezonul de iarnă, dominată de razele reci ale soarelui. În acest fel, în mijlocul naturii, elevii au aplicat în practică, cunoștințele dobîndite în cadrul orelor de biologie s-au pregătit pentru olimpiada de biologie, concursul de selectare a valorilor tinerilor cercetători ai naturii.

Timpu! petrecut în această tabără a fost util elevilor.

Ei au îmbinat cunoștințele teoretice cu activități practice, în calitatea lor de prieteni ai naturii.

Dorina Pușcău

cl. a IX-a E

Activități în cadrul cercului de biologie

Cercul de biologie al clasei noastre a desfășurat în primul trimestru și continuă să desfășoare în acest an școlar, o bogată activitate practică, atît de laborator cît și de teren.

Pentru o mai bună fundamentare a cunoștințelor tot mai numeroase dobîndite în clasă, pentru primirea obișnuinței muncii practice, experimentale, cît și pentru plăcerea oferită de drumețiile în natura atît de pitorească a patriei noastre (acestea fiind totodată și activități sportive, de recreere la cîte un stîrșit încărcat de săptămîină), am organizat excursii.

Astfel, ieșirile în Munții Zărandului la Cetatea Șiriei, Căsoaia și pe valea Cladovei, făcute în trimestrul I al acestui an școlar, sînt cîteva dovezi în acest sens. Cu aceste prilejuri s-au făcut numeroase determinări de roci, plante, animale și păsări, cu scopul de a ne îmbogăți cunoștințele de biologie și de a ne forma ca viitori cercetători de teren. Așa au fost studiate la fața locului: granitul de Highiş, cremenea (silexul), micașisturile, iar dintre plante au fost studiate în primul rînd stejarul, cu toate speciile sale din aceste păduri dominante în zonă: gorunul, cerul, gîrnița. Ne-au atras atenția adaptările acestor arbori la mediul arid, secetos: frunzele ceroase, rădăcina foarte ramificată și înfiptă adînc în pămînt, reducerea suprafeței foliare prin existența lobilor ș.a. Adaptări interesante la locuri uscate și cu vînturi continue am văzut și la plante ierboase ca luminărica, ce are pe frunze și tulpină un strat abundent de perișori care o apără de frig și în același timp de o transpirație prea intensă. Tufele de păducel, porumbăr, măcieș, soc ș.a., care populează coastele dealurilor din Zărand, toate prezintă fenomene de adaptare la mediul în general arid, care există în timpul verii în aceste locuri (frunze lobate, păroase, fructe uscate, tulpini cu țepi, rădăcini adînci).

În biocenoză de pădure am făcut observații asupra înălțimilor arborilor în raport de desimea lor. Elevii au putut vedea cum arborii din mijlocul pădurii sînt mai înalți și cu frunzele la vîrf, iar cei de la marginea pădurii au o statură mai mică și frunzele se întind pînă jos la sol. Tinerii biologi au determinat după coajă, forma coroanei, frunze și fructe, arborii: stejarul, arțarul, frasinul, carpenul, teiul, plopul, salcia ș.a. Am aprofundat cunoștințele privind caracteristicile pădurilor de foioase. Datorită luminozității mari a acestor păduri, în ele cresc bine plante ierboase, arbuști și plante urcătoare: curpănul de pădure (clematis), iedera (Hedera), hameiul (Humulus). Pentru că aceste excursii le-am făcut toamna, în pădurea de foioase am putut observa și culorile variate ale frunzelor și fructelor, de la verde intens la galben citrin, la portocaliu și roșu și apoi la sîngeriu! fructelor de dîrmoz. Am putut să ne reamintim cunoștințele din ora de botanică despre pigmentii vegetali: clorofilă, xantofilă, carotină, licopen care dau culoare atît de variată naturii, toamna. Am putea spune că, pe lîngă faptul științific ob-

servat de noi, această paletă cromatică extrem de variată a plantelor a contribuit la des-
tinderea noastră psihică, la crearea unei stări de bună dispoziție.

În locurile deschise, bătute permanent de soare, primăvara, vata mai ales, urcînd
dealul Cetății și Dealul Minișului, am putut vedea procesul de dezagregare fizică și
descompunere chimică a rocilor componente sub acțiunea agenților modificali ai
scoarței. Datorită căldurii mari și diferențelor mari de temperatură dintre iarnă și va-
ră, zi și noapte, granitul și micașitul prezintă la suprafață numeroase fragmente și
sfărămături. Procesul avansat de oxidare a rocilor (oxizi de fier) dau culoarea genera-
lă a profilelor, roscată. Peisajul pictural al naturii toamna, ne-a însoțit pretutindeni,
îndemnîndu-ne parcă să facem totul pentru ocrotirea mediului ambiant, ceea ce, de
altfel este și un imperativ pe plan mondial, pentru că numai cu o natură bogată, con-
servată, vom putea supraviețui peste milenii. Aceste acțiuni ne-au adus un plus de cu-
noștințe, au fost reușite, din care cauză, pe tot parcursul lor erau însoțite de veselie,
bună dispoziție, ceea ce constituie încă un imbold ca-n viitor să le continuăm cu mem-
brii cercului de biologie.

Dana Cîrlig
cl. a IX-a E

Analiza spectrală

Reprezintă o metodă fizică de cercetare a compoziției unei substanțe, prin exami-
narea spectrului sau de radiație. Procedul se bazează pe faptul că poziția în spectru
a liniilor sau benzilor spectrale de emisie sau de absorbție este caracteristică fiecărei
substanțe, iar intensitatea lor depinde de concentrația acesteia într-un amestec dat. Ana-
liza spectrală poate fi efectuată pe cale vizuală, fotografică sau fotoelectrică. Față de
alte metode de analiză prezintă următoarele avantaje:

Are o mare sensibilitate, astfel că pot fi determinate elemente chimice prezente în-
tr-o probă dată, pînă la cantități de a miliardă parte dintr-un gram.

Necesită cantități mici din substanța de cercetat, putînd fi efectuată și asupra pro-
duselor finite fără a le deteriora.

Permite determinarea simultană aproape a tuturor elementelor chimice prezente în-
tr-o probă dată, prin studierea spectrului de radiații a probei.

Durata unei analize spectrale este foarte scurtă, de ordinul minutelor, ceea ce face
posibilă utilizarea ei, în scopul determinării compoziției chimice a unui metal, chiar în
timpul elaborării șarjei. Mai mult, prin folosirea unui computer adecvat, se poate au-
tomatiza întregul proces de formare a compoziției chimice a masei topite.

Procedul de determinare a elementelor ce intră în compoziția unui material prin
studierea liniilor spectrale caracteristice ale acestuia, se numește analiză spectrală ca-
litative și constă în măsurarea lungimilor de undă ale liniilor ce apar în spectru și iden-
tificarea lor cu liniile spectrale din tabele.

Analiza spectrală calitativă poate fi efectuată cu stiloscopul sau stilometrul sau
prin fotografierea spectrului și studierea amănunțită a acesteia. Ultimul procedeu pre-
zintă avantajul că spectrul poate fi cercetat mai minuțios și poate fi reluat pentru cer-
cetare.

Analiza spectrală cantitativă este bazată pe dependența intensității I a liniei spec-
trale caracteristice a substanței unui element de concentrație în probă. Această depen-
dență este dată de legea :

$$I = mC^n$$

unde m și n sînt două constante caracteristice. Practic, analiza se face vizual prin com-
parație cu intensitatea aceleiași linii a unui etalon. Acest procedeu dă valori cu apro-
ximație destul de mare. Prin înregistrarea spectrului mostrei la un spectrograf, urma-
tă de analiza acestuia cu un microfotometru, se poate efectua o analiză cantitativă de
mare precizie.

Perechile de linii din spectrul elementului cercetat și al elementului etalon, alese
pentru comparație se numesc perechi analitice.

Ileana Ionițaș
cl. a XII-a B

Efect Procopiu

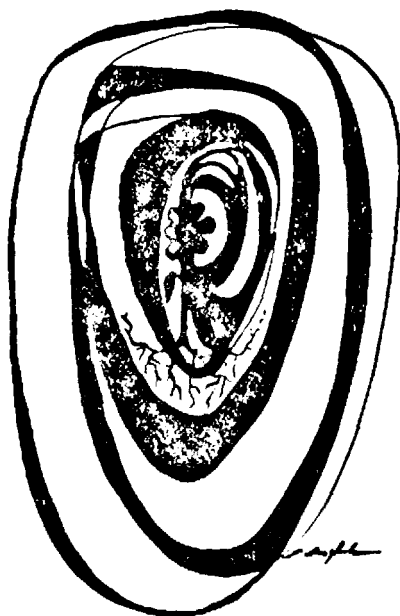
Ștefan Procopiu, născut în 1890, a fost profesor la Universitatea din Iași. Membru al Academiei Române, s-a preocupat de studii de fizică. A calculat mai devreme decât Bohr magnetoul, care se numește astăzi magnetou Bohr-Procopiu. A cercetat birefrigența, electrică și magnetică a soluțiilor coloidale și a suspensiilor cristaline și a descoperit polarizarea longitudinală numită și fenomen Procopiu. Magnetizația unui fier variază în salturi atunci când intensitatea cîmpului magnetic exterior variază continuu, fenomen observat de către Barkhausen. Reluînd studiul acestui fenomen, Ștefan Procopiu descoperă apariția unei tensiuni electromotoare în spirele unei bobine coaxiale cu un fir de fier străbătut de un curent alternativ. Pentru ca efectul să se producă, este necesar să existe un cîmp magnetic slab, ale cărui linii de forță să fie paralele cu firul de fier.

Efectul Procopiu poate fi pus în evidență și în laboratoarele școlilor dacă folosim un fir de fier întins, alimentat la o tensiune alternativă obișnuită. Firul este înfășurat de două bobine axiale. Bobina interioară se conectează la un voltmetru electronic pentru a măsura tensiunea electromotoare, cealaltă este conectată la o sursă de curent continuu pentru a produce cîmpul magnetic paralel cu firul.

Efectul Procopiu este folosit astăzi la realizarea memoriilor mașinilor de calcul.

Am expus pe scurt această descoperire românească, pentru a dovedi încă o dată inepuizabilitatea fenomenelor naturii și, ca atare, posibilitățile pe care ni le oferă munca perseverentă de cercetare a fenomenelor naturii.

Lucia Crăciun
cl. a XII-a B





Șiruri recurente

Prelucrare după A. I. Marcușevici

Prezentare de Cornea Emil Adrian, cl. a XI-a A

Intrucît în ultimii ani, în diferite publicații de specialitate au apărut exerciții cu astfel de șiruri, iar în programa de liceu nu sînt cuprinse și bibliografia este destul de greu de găsit, considerăm util acest articol.

§ 1. Noțiunea de șir recurent constituie o generalizare a noțiunii de progresie aritmetică și geometrică. Cazuri particulare ale acestor șiruri sînt șirurile pătratelor și cuburilor numerelor naturale, orice șir periodic (șirurile cifrelor descompunerii zecimale a unui număr rațional), etc.

Vom nota șirurile : $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ (1)

sau pe scurt $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dacă există un număr natural k și numerele $a_1, a_2, \dots, a_k$ (reale sau complexe) astfel încît începînd cu un anumit număr n și pentru toate numerele care urmează :

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n \quad (2)$$

Șirul (1) se numește șir recurent de ordinul k , iar relația (2), relație de recurență de ordinul k .

Exemple : 1) Progresia geometrică. Să presupunem că avem progresia geometrică :

$$u_1 = a; u_2 = aq; u_3 = aq^2; \dots; u_n = aq^{n-1}, \dots \quad (3)$$

$$\text{unde relația (2) ia forma : } u_{n+1} = u_n q \quad (4)$$

Avem $k=1$ și $a_1=q$. Progresia geometrică este un șir recurent de ordinul 1.

2) Progresia aritmetică. Să presupunem că avem progresia aritmetică : $u_1 = a, u_2 = a + d, u_3 = a + 2d, \dots, u_n = a + (n-1)d, \dots$

avem : $u_{n+1} = u_n + d$, dar această relație nu are forma relației (2).

Vom scrie această ultimă relație pentru două valori consecutive ale lui n și le vom scădea membru din membru și vom obține :

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n \text{ sau } u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad (5)$$

Această relație are forma relației (2). Avem $k=2, a_1=2, a_2=-1$. Progresia aritmetică constituie un șir recurent de ordinul 2.

3) Șirul lui Fibonacci. Acest șir verifică relația de recurență

$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, unde $u_1 = u_2 = 1$, adică fiecare termen este egal cu suma primilor doi termeni precedenți. Relația $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

arată că șirul lui Fibonacci este un șir recurent de ordinul 2, în care $k=2, a_1 = a_2 = 1$.

Termenii acestui șir se numesc — NUMERELE LUI FIBONACCI.

4) Șirul pătratelor numerelor naturale.

$$u_1 = 1^2; u_2 = 2^2; u_3 = 3^2; \dots; u_n = n^2; \dots \quad (6)$$

$$\text{Aici } u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = u_n + 2n + 1 \quad (7)$$

$$\text{Mărimd pe } n \text{ cu o unitate, obținem } u_{n+2} = u_{n+1} + 2n + 3 \quad (8)$$

$$\text{Scădem pe (7) din (8) : } u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} + u_n + 2$$

$$\text{sau } u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2 \quad (9)$$

Mărim din nou pe n cu o unitate și vom obține :

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2 \quad (10)$$

$$\text{Scădem din (10) pe (9) : } u_{n+3} - u_{n+2} = 2u_{n+2} - 2u_{n+1} - u_{n+1} + u_n$$

$$\text{sau } u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n \quad (11)$$

Am obținut o relație de recurență în care $k=3, a_1=3, a_2=-3, a_3=1$. Deci șirul (6) este un șir recurent de ordinul 3.

5) În același mod se poate arăta că șirul cuburilor numerelor naturale : $u_1 = 1^3; u_2 = 2^3; u_3 = 3^3; \dots, u_n = n^3, \dots$ (12)

este șir recurent de ordinul 4. Termenii săi satisfac relația de recurență :

$$u_{n+4} = 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n \quad (13)$$

6) Șiruri periodice. Fie $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ un șir periodic, de perioadă principală p . Avem $u_{n+p} = u_n$ (14) oricare n natural. Acest șir este un șir recurent de ordinul p , în care

$$k = p, a_1 = a_2 = \dots = a_{p-1} = 0 \text{ și } a_p = 1.$$

Exercițiu: Să se demonstreze că șirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

care satisface relația $u_{n+1} = \frac{u_n + \operatorname{tg} \frac{\pi}{m}}{1 - u_n \operatorname{tg} \frac{\pi}{m}}$ este periodic.

Să se determine perioada ($m \in \mathbb{N}^*$).

(Olimpiada Internațională)

Soluție:

Notăm: $u_n = \operatorname{tg} \alpha_n$ și vom avea $\operatorname{tg} \alpha_{n+1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_n + \operatorname{tg} \frac{\pi}{m}}{1 - \operatorname{tg} \alpha_n \operatorname{tg} \frac{\pi}{m}}$

adică: $\operatorname{tg} \alpha_{n+1} = \operatorname{tg}(\alpha_n + \frac{\pi}{m})$. De aici se obține o relație între α_{n+1} și α_n

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{\pi}{m} + k\pi \quad \text{unde } k \in \mathbb{Z}.$$

Vom scrie în continuare ultima relație pentru m valori consecutive ale lui n :

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{\pi}{m} + k_1\pi$$

$$\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + \frac{\pi}{m} + k_2\pi \quad \text{unde } k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_{n+m} = \alpha_{n+m-1} + \frac{\pi}{m} + k_m\pi$$

adunând toate aceste relații vom obține:

$$\alpha_{n+m} = \alpha_n + m \cdot \frac{\pi}{m} + k_1\pi + k_2\pi + \dots + k_m\pi$$

$$\text{sau } \alpha_{n+m} = \alpha_n + (1 + k_1 + k_2 + \dots + k_m)\pi$$

$$\text{dar } 1 + k_1 + k_2 + \dots + k_m \in \mathbb{Z}$$

Deci $\operatorname{tg} \alpha_{n+m} = \operatorname{tg} \alpha_n$, adică $u_{n+m} = u_n$.

Șirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este periodic de perioadă m ;

este șir recurent de ordinul m .

§ 2. O problemă importantă legată de progresiile aritmetice și geometrice, precum și de șirul pătratelor numerelor naturale este găsirea sumei a n termeni ai fiecărui șir dintre acestea.

Fie în general $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ (15)

un șir recurent de ordinul k ai cărui termeni satisfac relația :

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n \quad (n \geq m-1) \quad (16)$$

Să studiem un nou șir, format din sumele s_n ale numerelor (15)

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2; \dots; S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \dots \quad (17)$$

și să arătăm că acest șir este de asemenea recurent de ordinul $k+1$.

Pentru demonstrație vom face observația :

$$\begin{aligned} u_1 &= S_1; u_2 = S_2 - u_1 = S_2 - S_1; \dots; u_n = S_n - (u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}) = \\ &= S_n - S_{n-1}; \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Făcînd $S_0 = 0$, așa încît $u_1 = S_1 - S_0$ și înlocuind în relația (16) pe

$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ în funcție de $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ vom obține :

$$\begin{aligned} S_{n+k} - S_{n+k-1} &= a_1(S_{n+k-1} - S_{n+k-2}) + a_2(S_{n+k-2} - S_{n+k-3}) + \dots + \\ &+ a_k(S_n - S_{n-1}), \text{ de unde} \end{aligned}$$

$$S_{n+k} = (1 + a_1)S_{n+k-1} + (a_2 - a_1)S_{n+k-2} + \dots + (a_k - a_{k-1})S_n - a_k S_{n-1},$$

sau înlocuind pe n cu $n+1$.

$$S_{n+k+1} = (1 + a_1)S_{n+k} + (a_2 - a_1)S_{n+k-1} + \dots + (a_k - a_{k-1})S_{n+1} - a_k S_n$$

pentru $n \geq m-1$ (19)

Aceasta este o relație de recurență de ordinul $k+1$.

Exemple : 1) Progresia geometrică

$$u_n = a q^{n-1} \text{ și } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \text{ adică } S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1}.$$

Deoarece termenii progresiei geometrice $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfac relația de recurență $u_{n+1} = q u_n$, termenii șirului $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ trebuie să satisfacă relația :

$$S_{n+2} = (1 + q)S_{n+1} - q S_n.$$

2) Progresia aritmetică. $u_n = a + (n - 1)d$ și

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = a + a + d + a + 2d + \dots + a + (n-1)d =$$

$$= na + \frac{n(n-1)}{2} d. \quad \text{Cum termenii progresiei aritmetice } \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

satisfacă o relație de recurență de forma $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$, termenii șirului $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ trebuie să satisfacă relația :

$$S_{n+3} = (1+2)S_{n+2} + (-1-2)S_{n+1} - (-1)S_n$$

$$\text{sau } S_{n+3} = 3S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n \quad (21)$$

3) Șirul pătratelor numerelor naturale.

$u_n = n^2$ și $S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. Deoarece termenii șirului $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfacă relația $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$, termenii șirului $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ trebuie să satisfacă relația :

$$S_{n+4} = 4S_{n+3} - 6S_{n+2} + 4S_{n+1} - S_n$$

4) Șirul cuburilor numerelor naturale.

$$u_n = n^3 \text{ și } S_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$

Deoarece termenii șirului $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfacă relația :

$$u_{n+4} = 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n,$$

termenii șirului $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ trebuie să satisfacă relația :

$$S_{n+5} = 5S_{n+4} - 10S_{n+3} + 10S_{n+2} - 5S_{n+1} + S_n.$$

5) Șirul lui Fibonacci. Numerele lui Fibonacci satisfacă relația :

$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, sumele lor trebuie să satisfacă relația

$$S_{n+3} = 2S_{n+2} - S_n.$$

6) Șiruri periodice. Fie șirul $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $u_{n+p} = u_n$ oricare n natural, atunci termenii șirului $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ trebuie să satisfacă relația

$$S_{n+p+1} = S_{n+p} + S_{n+1} - S_n.$$

Este adevărat și reciproc (Demonstrație trivială).

Exercițiu : Fiind dat $p \in \mathbb{N}^*$ și mulțimea

$$M_p = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid \sum_{i=1}^p u_{k+i} = 1; (\forall) k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Să se demonstreze că mulțimea M_p este formată numai din șiruri periodice, pentru un anumit p . Să se arate că pentru un p dat, M_p conține un singur subșir convergent, a cărui limită se cere.

(Olimpiada de matematică,
locală, 1978).

Soluție. Pentru demonstrație vom face observația :

$$S_{k+p} - S_k = \sum_{i=1}^p u_{k+i} \quad \text{adică } S_{k+p} - S_k = 1$$

$$\text{sau } S_{k+p} = 1 + S_k$$

Vom scrie în continuare ultima relație pentru 2 valori consecutive ale lui k și le vom scădea :

$$S_{k+p} = 1 + S_k$$

$$S_{k+p+1} = 1 + S_{k+1} \text{ și obținem } S_{k+p+1} - S_{k+p} = S_{k+1} - S_k$$

$$\text{sau } S_{k+p+1} = S_{k+p} + S_{k+1} - S_k$$

Pentru $k=n$ avem $S_{n+p+1} = S_{n+p} + S_{n+1} - S_n$, adică șirul $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

este recurent de ordinul $p+1$ și conform reciprocei de la exemplul 6 avem $u_{n+p} = u_n$ pentru oricare n natural. Deci pentru un p dat M_p conține numai șiruri periodice.

Pentru partea a doua a problemei ne vom folosi de teorema : „Orice șir periodic și convergent este constant“. (Pentru demonstrarea acestei teoreme se poate folosi Definiția de convergență a șirurilor cu vecinătăți).

Fie $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ care este convergent. Conform teoremei de mai sus $u'_n = m$ pentru oricare n natural, unde m este constant.

$$\text{Cum } \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \in M_p, \text{ atunci } \sum_{i=1}^p u_{i+i} = 1 \quad \text{sau} \quad \sum_{i=1}^p m = 1$$

sau $p m = 1$ adică $m = \frac{1}{p}$. Deci $u'_n = \frac{1}{p}$ este constant. Cum M_p conține un singur șir constant rezultă că $\{u'_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ este unic.

§ 3. În cazul progresiilor geometrice și aritmetice, a șirurilor pătrate-lor sau cuburilor numerelor naturale și în cazul șirurilor periodice, pen-tru aflarea unui termen nu trebuie calculați toți termenii precedenți. Dar în cazul șirului lui Fibonacci conform celor expuse anterior, pentru aflarea unui termen ar trebui calculați toți termenii care îl preced.

Să încercăm să găsim o formulă cu ajutorul căreia să putem calcu-la, în cazul cel mai general, orice termen al șirului recurent, fără a cal-cula termenii precedenți.

$$\text{Fie } u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n \quad (22)$$

o relație de recurență de ordinul k . Dacă ea este satisfăcută pentru toa-te valorile naturale $n=1, 2, 3, \dots$, atunci înlocuind $n=1$, obținem :

$$u_{k+1} = a_1 u_k + a_2 u_{k-1} + \dots + a_k u_1.$$

Deci dacă cunoaștem pe $u_1, u_2, \dots, u_k$, putem calcula pe u_{k+1} , iar înlocuind în (22) pe $n=2$, vom calcula pe u_{k+2} .

$$u_{k+2} = a_1 u_{k+1} + a_2 u_k + \dots + a_k u_2$$

În același mod putem calcula u_{k+m} , dar în prealabil am calculat termenii precedenți, adică : $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{m+k-1}$.

Deci termenii șirului recurent de ordinul k , care satisfac ecuația (22), se determină în mod unic, dacă se cunosc primii k termeni ai și-rului.

Dînd valori diferite primilor k termeni ai șirului recurent, putem obține o mulțime infinită de șiruri care satisfac relația (22). Deosebirea dintre aceste șiruri se manifestă încă de la primii k termeni și se con-tinuă și la ceilalți.

Exemple : 1) Progresia geometrică. Avem relația de recurență de ordinul 1, $u_{n+1} = q u_n$ este satisfăcută de toate progresiile geometrice care au rația q , dar ele diferă prin valorile primului termen.

2) Progresia aritmetică. Avem relația de recurență de ordinul 2, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ este satisfăcută de toate progresiile aritmetice posi-bile, dar care diferă una de alta prin unul dintre termenii $u_1 = a$ și $u_2 = a+d$ (adică diferă fie prin valoarea lui (a) , fie prin valoarea rației (d) , fie prin amîndouă).

Presupunem că șirurile $\{x_n\}_{n \in N}$; $\{y_n\}_{n \in N}$; ...; $\{z_n\}_{n \in N}$ satisfac ecuația (22).

(23)

și vom avea:

(24)

Să construim o combinație liniară cu termenii

$x_{n+k}, y_{n+k}, \dots, z_{n+k}$. Fie această combinaire liniară

$$Ax_{n+k} + By_{n+k} + \dots + Cz_{n+k}.$$

$$Ax_{n+k} + By_{n+k} + \dots + Cz_{n+k} = a_1(Ax_{n+k-1} + By_{n+k-1} + \dots + Cz_{n+k-1}) + \\ + a_2(Ax_{n+k-2} + By_{n+k-2} + \dots + Cz_{n+k-2}) + \dots + a_k(Ax_n + By_n + \dots + Bz_n) \quad (25)$$

De aici rezultă sirul :

(26)

Schimbând aceste numere $A, B, \dots, C$ putem obține, diferite valori pentru termenii $t_1, t_2, t_3, \dots$

Fie şirul $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ (27)

un şir care verifică relația (22). Să cercetăm dacă putem da numerelor $A, B, \dots, C$ valori astfel încît primii k termeni ai şirului (26) să coincidă cu primii k termeni ai şirului (27). Dacă este posibil, conform celor precedente vor coincide toți termenii şirurilor (26) și (27) și vom avea :

(28)

pentru un n oarecare. Adică orice şir care verifică relația (22) poate fi reprezentat prin şirurile (23) dacă şi numai dacă se pot alege numerele $A, B, \dots, C$ astfel încît să fie satisfăcute relațiile :

(29)

Cum numărul ecuațiilor este k , este rațional să luăm numărul necunoscutele tot k (necunoscutele fiind $A, B, \dots, C$, numărul lor fiind egal cu numărul șirurilor (23)).

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \dots & z_1 \\ x_2 & y_2 & \dots & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k & y_k & \dots & z_k \end{vmatrix}$$

Sistemul de k şiruri (23), prin care termenii oricărui şir care satisface relaţia de recurenţă (22) se exprimă după formulele (28), se numeşte baza relaţiei de recurenţă.

Exemple : 1) Pentru relația de recurență de ordinul 2.

Baza acestei relații trebuie construită din 2 șiruri.

Să le alegem punînd $x_1 = 1$; $x_2 = 1$ și $y_1 = 0$; $y_2 = 1$.

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n = \dots = u_2 - u_1$$

Adică $x_{n+1} - x_n = 0$ sau $x_{n+1} = x_n$ pentru oricare n natural.

Deci şirul $\{x_n\}_{n \in N^*}$ este şir constant 1.

În cazul şirului $\{y_n\}_{n \in N^*}$

$$y_{n+1} - y_n = y_2 - y_1 = 1 - 0 = 1$$

$$\text{sau } y_{n+1} - y_n = 1.$$

Scriem toate relațiile și le adunăm membru cu membru

$$y_n - y_{n-1} = 1$$

$$y_{n-1} - y_{n-2} = 1$$

$$\dots$$

$$y_2 - y_1 = 1$$

și obținem $y_n = n-1$, adică $\{y_n\}_{n \in N^*} : 0, 1, 2, 3, \dots, n-1, \dots$

După formula (29) avem :

$$u_n = Ax_n + By_n \text{ sau } u_n = A + B(n-1)$$

$$\text{adică } u_1 = A \text{ și } u_2 = A + B$$

$$\text{Deci } A = u_1 \text{ și } B = u_2 - u_1$$

$$u_n = u_1 + (n-1)(u_2 - u_1)$$

Aceasta este forma generală pentru orice termen al şirului care satisface relația (30).

2) Avem relația şirului lui Fibonacci.

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (31)$$

Pentru această relație va trebui să construim o bază din 2 şiruri

$$\{x_n\}_{n \in N^*} \text{ și } \{y_n\}_{n \in N^*}, \text{ unde } x_1 = 1, x_2 = 1 \text{ și } y_1 = 0, y_2 = 1$$

$$\{x_n\}_{n \in N^*} \quad 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

$$\{y_n\}_{n \in N^*} \quad 0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$$

Avem, deci $y_2 = x_1$, $y_3 = x_2$, $y_4 = x_3$, $y_5 = x_4$, ... și în general $y_n = x_{n-1}$. Această ultimă relație se va demonstra prin inducție completă. Conform formulei (28) avem :

$$u_n = Ax_n + By_n, \text{ unde } A \text{ și } B \text{ se determină din ecuațiile :}$$

$$u_1 = Ax_1 + By_1 = A$$

$$u_2 = Ax_2 + By_2 = A + B$$

$$\text{de unde } A = u_1 \text{ și } B = u_2 - u_1$$

$$\text{Deci } u_n = u_1 x_n + (u_2 - u_1) y_n$$

$$\text{Pentru } n \geq 2 \text{ avem } u_n = x_{n-1}$$

$$u_n = u_1 x_n + (u_2 - u_1) x_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$\text{sau } u_n = u_1 (x_n - x_{n-1}) + u_2 x_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

Determinantul sistemului:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \dots & r_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i < j \\ i=1, k-1 \\ j=2, k}} (r_j - r_i) \neq 0$$

(Δ este determinant Vandermande).

Teoremă:

$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n$. Dacă ecuația caracteristică are rădăcini distincte $r_1, r_2, \dots, r_k$, atunci există o bază formată din k progresii geometrice cu rațiile $r_1, r_2, \dots, r_k$.

Exemple: 1) Șirul lui Fibonacci.

$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, unde $u_1 = 1$ și $u_2 = 1$.

Ecuația caracteristică este $q^2 = q + 1$, de

$$\text{unde } r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ și } r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$u_n = A r_1^{n-1} + B r_2^{n-1}$$

$$u_1 = 1 = A + B$$

$$u_2 = 1 = A \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + B \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} (A+B) + \frac{\sqrt{5}}{2} (A-B)$$

Prin rezolvarea sistemului se obține:

$$A = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \quad \text{și} \quad B = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}$$

$$u_n = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

2) Șirul $u_1 = 5, u_2 = 7, u_3 = 1, u_4 = 3, u_5 = 2,$

$u_6 = 1, u_7 = 3, \dots$ cu relația $u_{n+3} = u_n$ pentru $n > 2$

Ecuția caracteristică $q^3 = 1$, de unde

$$r_1 = 1, r_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, r_3 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$u_n = A r_1^{n-1} + B r_2^{n-1} + C r_3^{n-1}$$

$$u_n = A + B \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1} + C \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1}$$

$$\text{Dar } -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = -\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \text{ și}$$

$$-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = -\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$u_n = A + (-1)^{n-1} B \left[\cos \frac{\pi}{3} (n-1) - i \sin \frac{\pi}{3} (n-1) \right] +$$

$$+ (-1)^{n-1} C \left[\cos \frac{\pi}{3} (n-1) + i \sin \frac{\pi}{3} (n-1) \right] =$$

$$= A + (B+C)(-1)^{n-1} \cos \frac{\pi}{3} (n-1) + i(-B+C)(-1)^{n-1}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} (n-1)$$

Vom face substituția $B+C=A_1$ și $i(-B+C) = A_2$

$$u_n = A + A_1(-1)^{n-1} \cos \frac{\pi}{3}(n-1) + A_2(-1)^{n-1} \sin \frac{\pi}{3}(n-1)$$

Avem sistemul:

$$u_3 = 1 = A + A_1 \cos \frac{2\pi}{3} + A_2 \sin \frac{2\pi}{3} = A - \frac{1}{2} A_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} A_2$$

$$u_4 = 3 = A - A_1 \cos \frac{3\pi}{3} - A_2 \sin \frac{3\pi}{3} = A + A_1$$

$$u_5 = 2 = A + A_1 \cos \frac{4\pi}{3} + A_2 \sin \frac{4\pi}{3} = A - \frac{1}{2} A_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} A_2$$

După rezolvare se obține: $A=2$; $A_1=1$ și $A_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\text{Deci } u_n = 2 + (-1)^{n-1} \left[\cos(n-1) \frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(n-1) \frac{\pi}{3} \right]$$

$$u_n = 2 + (-1)^{n-1} \frac{2}{3} \sin(n-2) \frac{\pi}{3} \quad n > 2.$$

Exerciții:

1) Să se determine forma generală a termenilor șirului $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ care satisface relația de

$$\text{recurență } u_n = 7u_{n-1} - 12u_{n-2}$$

unde $u_0 = 7$ și $u_1 = 25$.

$$\text{Soluție: } u_n = 7u_{n-1} - 12u_{n-2}.$$

Ecuția caracteristică: $q^2 - 7q + 12 = 0$ care are rădăcini distincte $r_1 = 3$ și $r_2 = 4$.

$$u_n = A r_1^{n-1} + B r_2^{n-1} \text{ sau } u_n = A \cdot 3^{n-1} + B \cdot 4^{n-1}$$

$$\begin{cases} u_1 = A + B = 7 \\ u_2 = 3A + 4B = 25 \end{cases} \quad \text{adică} \quad \begin{cases} A = 3 \\ B = 4 \end{cases}$$

$$u_n = 3 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 4^{n-1}$$

$$u_n = 3^n + 4^n$$

2) Să se determine forma termenului general al șirului $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ care satisface relația de recurență $u_n = 4u_{n-1} - 16u_{n-2}$, cu $u_1 = 1$ și $u_2 = 2$.

Soluție: $u_n = 4u_{n-1} - 16u_{n-2}$. Ecuația caracteristică: $q^2 - 4q + 16 = 0$ care are rădăcinile $r_1 = 2(1 + i\sqrt{3})$ și $r_2 = 2(1 - i\sqrt{3})$.

$$r_1 = 4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{și} \quad r_2 = 4\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$u_n = A r_1^{n-1} + B r_2^{n-1}$$

$$\text{adică } u_n = A 4^{n-1} \left[\cos \frac{\pi}{3} (n-1) + i \sin \frac{\pi}{3} (n-1) \right] +$$

$$+ B 4^{n-1} \left[\cos \frac{\pi}{3} (n-1) - i \sin \frac{\pi}{3} (n-1) \right] = 4^{n-1}$$

$$\left[(A+B) \cos \frac{\pi}{3} (n-1) + i (A-B) \sin \frac{\pi}{3} (n-1) \right]$$

Vom face substituția $A_1 = A + B$ și $A_2 = i(A - B)$

și avem

$$u_n = 4^{n-1} \left[A_1 \cos \frac{\pi}{3} (n-1) + A_2 \sin \frac{\pi}{3} (n-1) \right]$$

$$\begin{cases} u_1 = A_1 = 1 \\ u_2 = 4 \left[A_1 \cos \frac{\pi}{3} + A_2 \sin \frac{\pi}{3} \right] = \end{cases}$$

$$= 2A_1 + 2\sqrt{3} A_2 = 2$$

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 0 \end{cases}$$

$$u_n = 4^{n-1} \left[1 \cdot \cos \frac{(n-1)\pi}{3} + 0 \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{3} \right]$$

$$u_n = 4^{n-1} \cos \frac{(n-1)\pi}{3}$$

3) Se dau două șiruri $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ și $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de numere naturale definite astfel :

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1; \quad x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1} \quad \text{oricare ar fi } n \geq 1$$

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 7; \quad y_{n+1} = 2y_n + 3y_{n-1} \quad \text{oricare ar fi } n \geq 1$$

Să se demonstreze că aceste șiruri nu au în comun decît termenii x_0, x_1 și y_0 .
(Olimpiadă S.U.A.)

Soluție :

Vom determina forma termenului general al șirului $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ și al șirului $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, și vom obține :

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad x_n = \frac{1}{3} (-1)^n + \frac{2}{3} 2^n$$

$$\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad y_n = (-1)^{n+1} + 2 \cdot 3^n$$

Problema revine la a rezolva ecuația :

$$\frac{1}{3} (-1)^n + \frac{2}{3} 2^n = (-1)^{m+1} + 2 \cdot 3^m \quad (*)$$

Să studiem ecuația pe cazuri :

$n = 2k$ și $m = 2p$ ecuația devine :

$$\frac{1}{3} (-1)^{2k} + \frac{2}{3} (2)^{2k} = (-1)^{2p+1} + 2 \cdot 3^{2p} \quad (0)$$

$$\begin{aligned}
 \text{sau } (-1)^{2k} + 2^{2k+1} &= 3(-1)^{2p+1} + 2 \cdot 3^{2p+1} \Leftrightarrow 1 + 2^{2k+1} = \\
 &= -3 + 2 \cdot 3^{2p+1} \Leftrightarrow 4 + 2^{2k+1} - 2 \cdot 3^{2p+1} = \\
 &= 0 \Leftrightarrow 2 + 2^{2k} - 3^{2p+1} = 0
 \end{aligned}$$

Pentru oricare ar fi $k, p \in \mathbb{N}^*$ membrul stîng al ecuației este un număr impar, iar membrul drept 0. Deci oricare ar fi $k, p \in \mathbb{N}^*$ nu poate fi soluție a ecuației (0).

Ne-a rămas să studiem cazul $k = p = 0$. Acestea se verifică că sînt soluție a ecuației (0). Adică $n = m = 0$ este soluție a ecuației inițiale (*). În modul cu totul analog se vor cerceta cazurile $n = 2k + 1, m = 2p$ și $n = 2k + 1, m = 2p + 1$ și $n = 2k, m = 2p + 1$. În final se obține că pentru a satisface ecuația inițială (*) n ia valorile 0 și 1, iar m numai valoarea 0.

Adică șirurile $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ și $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ au în comun numai termenii x_0, x_1 și y_0 .

4) Se dă șirul $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definit astfel $a_0 = a_1 = 1$, iar pentru $n > 1$

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2 + k}{a_{n-2}}, \text{ unde } k \in \mathbb{Z}. \text{ Să se arate că } a_n \in \mathbb{Z} \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Să se stabilească formula termenului general al șirului

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ în cazul } k = 0.$$

$$\text{Soluție: } a_n = \frac{a_{n-1}^2 + k}{a_{n-2}} \quad (\text{G.M.B.})$$

sau $a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + k$. Vom scrie această relație pentru 2 valori consecutive și le vom scădea

$$a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + k$$

$$a_{n-1} a_{n-3} = a_{n-2}^2 + k \text{ și vom obține}$$

$$a_n a_{n-2} - a_{n-1} a_{n-3} = a_{n-1}^2 - a_{n-2}^2$$

$$\text{adică } (a_n + a_{n-2}) a_{n-2} = a_{n-1} (a_{n-1} + a_{n-3})$$

$$\text{sau } \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} + a_{n-3}}{a_{n-2}} = \dots = \frac{a_2 + a_0}{a_1} = a_2 + 1$$

$$\text{Dar } a_2 = \frac{a_1^2 + k}{a_0} = k + 1$$

$$\text{Deci } \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}} = k + 2 \quad a_n = (k + 2) a_{n-1} - a_{n-2}$$

Cum $a_0 = a_1 = 1$ și $k \in \mathbb{Z}, a_2 \in \mathbb{Z}$ și prin inducție completă se va demonstra că $a_n \in \mathbb{Z}$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Teoremă : Termenul general u_n al oricărui șir recurent are forma unei sume de produse între un polinom în $(n-1)$ și termenii generali de forma q^{n-1} ai progresiilor geometrice ale căror rații sînt rădăcinile ecuației caracteristice (38).

Exemplu : Progresia aritmetică : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$

Ecuația caracteristică : $q^2 - 2q + 1 = 0$ sau $(q-1)^2 = 0$ adică are rădăcină multiplă pe 1, ordinul de multiplicitate fiind 2.

$$u_n = P(n-1) \cdot 1^{n-1} = P(n-1)$$

Cum ordinul de multiplicitate este 2 rezultă că polinomul $P(n-1)$ va fi de cel mult gradul întâi.

$$\text{Fie } P(n-1) = A_0 + A_1(n-1)$$

$$\begin{cases} A_0 + A_1(1-1) = u_1 \\ A_0 + A_1(2-1) = u_2 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} u_1 = A_0 \\ u_2 = A_0 + A_1 \end{cases}$$

De unde $A_0 = u_1$ și $A_1 = u_2 - u_1$

$$u_n = u_1 + (n-1)(u_2 - u_1) \text{ și vom nota } u_2 - u_1 = d$$

unde d va fi rația progresiei aritmetice.

$$u_n = u_1 + (n-1)d.$$

Exemplul de mai sus se poate generaliza.

Fie șirul

$$u_{n+m} = C_m^1 u_{n+m-1} - C_m^2 u_{n+m-2} + \dots + (-1)^{m+1} C_m^m u_n$$

la care se cunosc $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$. Se cere forma generală a șirului.

Ecuația caracteristică a acestui șir este

$$q^m = C_m^1 q^{m-1} - C_m^2 q^{m-2} + \dots + (-1)^{m+1} C_m^m q^0, \text{ unde } q \neq 0$$

adică $(q-1)^m = 0$. Deci ecuația caracteristică are rădăcină multiplă pe 1, iar ordinul de multiplicitate este m .

Adică $u_n = P(n-1) \cdot 1^{n-1}$ unde $P(n-1)$ este de gradul $m-1$.

Fie $P(n-1) = A_0 + A_1(n-1) + A_2(n-1)^2 + \dots + A_{m-1}(n-1)^{m-1}$ și vom avea :

$$\begin{cases} u_1 = P(0) = A_0 \\ u_2 = P(1) = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{m-1} \\ u_3 = P(2) = A_0 + A_1 \cdot 2 + A_2 \cdot 2^2 + \dots + A_{m-1} \cdot 2^{m-1} \\ \dots \\ u_m = P(m-1) = A_0 + A_1(m-1) + \dots + A_{m-1}(m-1)^{m-1} \end{cases}$$

Vom înlocui în expresiile lui $u_2, u_3, \dots, u_m$ pe A_0 cu u_1 și obținem :

$$u_2 - u_1 = A_1 + A_2 + \dots + A_{m-1}$$

$$u_3 - u_1 = A_1 \cdot 2 + A_2 \cdot 2^2 + \dots + A_{m-1} \cdot 2^{m-1}$$

$$\dots$$

$$u_m - u_1 = A_1(m-1) + A_2(m-1)^2 + \dots + A_{m-1}(m-1)^{m-1}$$

Aici avem un sistem de $(m-1)$ ecuații liniare, cu $(m-1)$ necunoscute. Vom forma determinantul sistemului

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1^2 & \dots & 1^{m-1} \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (m-1) & (m-1)^2 & \dots & (m-1)^{m-1} \end{vmatrix} = (m-1)! (m-2)! \dots 2! 1!$$

(Acest determinant este de tip Vandermonde).

Cum Δ este diferit de zero; conform Teoremei lui Cramer sistemul va avea soluție unică.

Fie această soluție $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}$

Atunci forma generală va fi :

$$u_n = P(n-1) \quad \text{adică}$$

$$u_n = u_1 + \xi_1 (n-1) + \xi_2 (n-1)^2 + \dots + \xi_{m-1} (n-1)^{m-1}$$

Prezentul material a fost pregătit cu scopul de a pune la îndemina celor interesați câteva cunoștințe utile în legătură cu studiul șirurilor recurente. Această interesantă temă a fost prezentată în broșura intitulată : „ȘIRURI RECURENTE“ a lui A. I. MARCUȘEVICI, apărută în Biblioteca SSMF în anul 1953 și mai recent într-un articol din gazeta matematică.

Intrucât broșura este din ce în ce mai greu de procurat de către numărul crescând al celor pe care tema îi interesează, iar articolul din gazetă este prea sumar, am socotit că o prezentare a conținutului de idei a lucrării lui A. I. MARCUȘEVICI însoțită de exemple și aplicații noi ar putea să fie de un folos real.

În lucrare am căutat să scot în relief legătura dintre șirurile recurente și modelele lor cele mai simple : progresia aritmetică și progresia geometrică, în scopul determinării formei termenului general în funcție de primii k termeni, unde k reprezintă ordinul de recurență al șirului.

Nu am inclus în această prezentare probleme legate de convergența șirurilor recurente pentru a nu da o amploare prea mare materialului și a respecta spațiul tipografic pus la dispoziție. Probleme legate de limitele șirurilor recurente vor face obiectul unui material ulterior.



Numărul soluțiilor întregi sau naturale la inecuații particulare, ca aplicații ale funcției parte întreagă

MOTTO: „Non scripsi medianem de iis quae vidi”

(N-am scris nici jumătate din cele ce le-am văzut)

MARCO POLO

Lucrarea de față reprezintă continuarea studiului început de către Nicolae Soare în articolul „Aplicații ale funcției partea întreagă”, apărut în Gazeta matematică 7/1976.

Funcția parte întreagă este funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, dată prin relația $f(x) = [x]$, care asociază oricărui număr real x pe cel mai mare întreg mai mic sau egal cu x . De exemplu $[2] = 2$, $[3,68] = 3$, $[-3,1] = -4$.

Teorema 1 Dacă funcția $f(x)$ este continuă și nenegativă pentru $q < x \leq p$, atunci suma

$$S_2 = \sum_{q < x \leq p} [f(x)]$$

reprezintă numărul punctelor cu coordonate întregi situate în regiunea plană (domeniul din spațiul bidimensional) determinată de inegalitățile $q < x \leq p$, $0 < y \leq f(x)$.

(Suma se face numai pentru numerele întregi x situate între p și q și pentru $x = p$ când acesta este întreg).

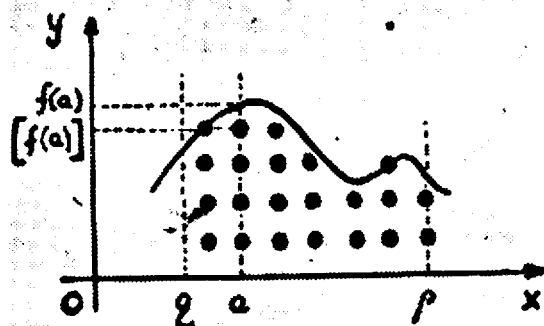


fig 1.

Demonstrație. Dacă $x = a$, unde $a \in \mathbb{Z} \cap (q, p]$ atunci $[f(a)]$ reprezintă numărul punctelor de coordonate întregi (a, b) , unde b ia toate valorile întregi din intervalul $(0, f(a)]$. (fig. 1). Făcând însumarea pentru toate numerele întregi x din intervalul $(q, p]$, suma S_2 va reprezenta numărul punctelor de coordonate întregi (x, y) , unde $q < x \leq p$ și $0 < y \leq f(x)$.

Înainte de a trece la generalizarea teoremei 1, voi face câteva precizări în legătură cu spațiul n -dimensional.

Pentru $n = 0, 1, 2, 3$, spațiul n -dimensional reprezintă punctul, dreapta, planul, respectiv spațiul nostru obișnuit. Pentru $n > 3$, spațiul n -dimensional este un spațiu abstract, pe care nu ni-l putem închipui, dar căruia îi putem întui și studia proprietățile. Făcând abstracție de timp ca a patra dimensiune, după cunoștințele noastre actuale despre Universul material, spațiul cu mai mult de 3 dimensiuni nu există în realitate, el fiind doar o creație a iscoditoarei minți omenești, un auxiliar prețios pentru generalizările din algebră.

Prin fiecare punct din spațiul n -dimensional se pot duce n drepte perpendiculare între ele 2 câte 2. Față de un sistem de referință rectangular $Ox_1x_2\dots x_n$, putem stabili o corespondență biunivocă între punctele spațiului n -dimensional și elementele produsului cartezian $\mathbb{R}^n$. Spunem că punctul A este de coordonate $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Prin analogie cu formulele din plan și spațiul tridimensional, s-a definit distanța d dintre 2 puncte $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ și $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ prin :

$$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

Generalizarea teoremei 1. Dacă funcția $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ este continuă și nenegativă pentru $q < x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \leq p$, atunci suma

$$S_n = \sum_{q < x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \leq p} [f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})]$$

reprezintă numărul punctelor cu coordonate întregi situate în domeniul (regiunea) din spațiul n -dimensional determinat de inegalitățile :

$$\begin{aligned} q < x_1 \leq p, q < x_2 \leq p, \dots, q < x_{n-1} \leq p, \\ 0 < x_n \leq f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

(Suma se face numai pentru numerele întregi $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ situate între p și q și pentru $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} = p$ dacă p este întreg).

Demonstrație. Dacă $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_{n-1} = a_{n-1}$, unde $a_i \in \mathbb{Z} \cap (q, p]$, $i = \overline{1, n-1}$, atunci $[f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})]$ reprezintă numărul punctelor de coordonate întregi $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, unde a_n ia toate valorile întregi din intervalul $(0, f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}))$. Făcînd însumarea pentru toate numerele întregi $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ din intervalul $(q, p]$, suma S_n reprezintă numărul punctelor de coordonate $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, unde x_n ia toate valorile întregi din intervalul $(0, f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))$. Deci domeniul din spațiul n -dimensional pentru care calculăm numărul punctelor de coordonate întregi este determinat de inegalitățile :

$$q < x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \leq p, 0 < x_n \leq f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

Ca aplicații ale acestor teoreme voi deduce cîteva formule cu ajutorul cărora se poate calcula direct numărul soluțiilor întregi sau naturale ale unor inecuații.

$$1) x + y \leq r, r > 0$$

În sistemul de coordonate carteziene xOy , ecuația $x + y = r$ este ecuația dreptei care taie axele de coordonate în punctele $(r, 0)$ și $(0, r)$. Punctele care satisfac inecuația dată se află pe dreapta de ecuație $x + y = r$ sau în semiplanul care conține originea. Este evident că numărul soluțiilor întregi este infinit. Soluțiile întregi nenegative sînt însă în număr finit, aflîndu-se pe sau în interiorul triunghiului determinat de axele Ox, Oy și de dreapta de ecuație $x + y = r$. (Prin întregi nenegativi înțeleg numerele naturale și numărul 0). Pentru a ușura calculul numărului de soluții întregi nenegative, împărțim triunghiul amintit în domenii plane determinate de inegalități. Fie n_i numărul punctelor de coordonate întregi nenegative din domeniul D_i , $i = \overline{1, 5}$, și fie D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 determinate de inegalitățile :

$$\begin{array}{l} \text{respectiv} \\ x = 0, 0 < y \leq r \\ y = 0, 0 < x \leq r \\ 0 < x \leq \frac{r}{2}, 0 < y \leq r - x \\ 0 < y \leq \frac{r}{2}, 0 < x \leq r - y \\ 0 < x \leq \frac{r}{2}, 0 < y \leq \frac{r}{2} \end{array}$$

Dacă în inegalitățile care îl determină pe D_1 punem în locul lui x (respectiv y) pe y (respectiv x), obținem inegalitățile care îl determină pe D_2 . La fel pentru D_3 și D_4 . Datorită acestei simetrii, $n_1 = n_2$ și $n_3 = n_4$. Deoarece $r - x \geq r/2$ pentru $x \in (0, r/2]$ și $r - y \geq r/2$ pentru $y \in (0, r/2]$, D_5 este inclus atît în D_3 cît și în D_4 . Deci și n_3 și n_4 îl conțin pe

ns. În afară de punctul 0 (0,0), nici un alt punct al triunghiului nu a rămas necuprins în cele 5 domenii. Într-adevăr punctul de coordonate $(r/2, r/2)$ se găsește pe dreapta de ecuație $x + y = r$.

În figura 2 a b c d e, am reprezentat pe n_1, n_2, n_3, n_4 respectiv n_5 :

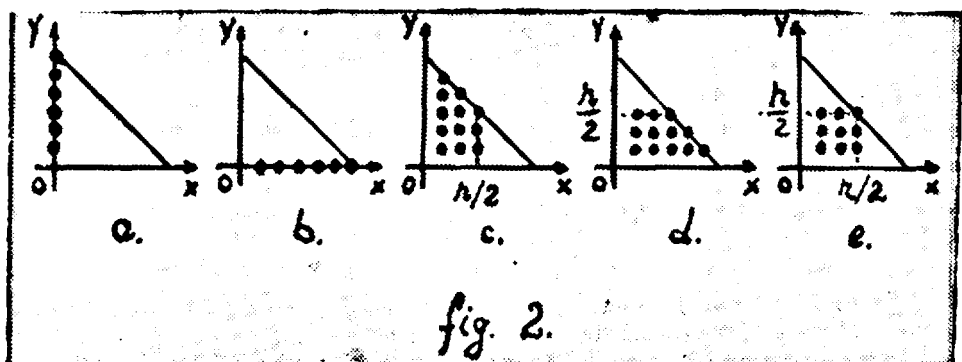


fig. 2.

Fie $p_{1,2}$ numărul soluțiilor întregi nenegative ale inecuației date. Avem $p_{1,2} = 1 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 1 + 2n_1 + 2n_3 + n_5$. Folosindu-ne de teorema 1 și de faptul că $n_5 = r[r/2]^2$, (numărul punctelor de coordonate întregi din pătratul de latură $r/2$ format de D_5), obținem formula :

$$p_{1,2} = 1 + 2[r] + 2 \sum_{0 < x \leq \frac{r}{2}} [r-x] - \left[\frac{r}{2}\right]^2$$

$$2) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq r, \quad r > 0, n \geq 2$$

Ca și în cazul inecuației de la punctul 1), numărul soluțiilor întregi este infinit, așa că vom lua în considerare doar soluțiile întregi nenegative. Pentru a număra mai ușor punctele de coordonate întregi nenegative, le voi împărți în domenii din spațiul n -dimensional delimitate ca și în cazul precedent de inegalități. Fie domeniile $D_{i,j,k}$ unde $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, C_n^i}$, $k = \overline{0, 1}$. Indicele i este numărul variabilelor pozitive (diferite de 0 din inegalitățile ce determină domeniul, ceea ce reprezintă dimensiunea domeniului. Indicele j numerotează rațional posibilitățile de a alege i astfel de variabile din cele n . Indicele k numerotează rațional posibilitățile de a alege i variabile pe cea care este

mărginită superior de o funcție de celelalte $n-1$ variabile pentru $i > 1$. Pentru $i = 1$ luăm $k = 1$, iar pentru domeniile în care toate cele i variabile sînt independente ($i > 1$), considerăm $k = 0$.

$$D_{1,1,1} \quad x_1 = 0, \dots, x_{n-1} = 0, 0 < x_n \leq h$$

$$D_{1,2,1} \quad x_1 = 0, \dots, x_{n-2} = 0, x_n = 0, 0 < x_{n-1} \leq h$$

⋮

$$D_{1,C_n^1,1} \quad x_2 = 0, \dots, x_n = 0, 0 < x_1 \leq h$$

$$D_{2,1,1} \quad x_1 = 0, \dots, x_{n-2} = 0, 0 < x_{n-1} \leq \frac{h}{2}, 0 < x_n \leq h - x_{n-1}$$

$$D_{2,1,2} \quad x_1 = 0, \dots, x_{n-2} = 0, 0 < x_n \leq \frac{h}{2}, 0 < x_{n-1} \leq h - x_n$$

$$D_{2,1,0} \quad x_1 = 0, \dots, x_{n-2} = 0, 0 < x_{n-1} \leq \frac{h}{2}, 0 < x_n \leq \frac{h}{2}$$

$$D_{2,2,1} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \dots, x_{n-3} = 0, x_{n-1} = 0, 0 < x_{n-2} \leq \frac{h}{2}, \\ 0 < x_n \leq h - x_{n-2} \end{cases}$$

⋮

$$D_{2,C_n^2,0} \quad x_3 = 0, \dots, x_n = 0, 0 < x_1 \leq \frac{h}{2}, 0 < x_2 \leq \frac{h}{2}$$

⋮

$$D_{n,C_n^n,1} \quad 0 < x_1 \leq \frac{h}{n}, \dots, 0 < x_{n-1} \leq \frac{h}{n}, 0 < x_n \leq h - x_1 - \dots - x_{n-1}$$

$$D_{n,C_n^n,2} \quad \begin{cases} 0 < x_1 \leq \frac{h}{n}, \dots, 0 < x_{n-2} \leq \frac{h}{n}, 0 < x_n \leq \frac{h}{n}, \\ 0 < x_{n-1} \leq h - x_1 - \dots - x_{n-2} - x_n \end{cases}$$

⋮

$$D_{n,C_n^n,n} \quad 0 < x_2 \leq \frac{h}{n}, \dots, 0 < x_n \leq \frac{h}{n}, 0 < x_1 \leq h - x_2 - \dots - x_n$$

$$D_{n,C_n^n,0} \quad 0 < x_1 \leq \frac{h}{n}, \dots, 0 < x_n \leq \frac{h}{n}$$

Fie $p_{1,n}$ numărul soluțiilor întregi nenegative ale inecuației date. Folosindu-ne de generalizarea teoremei 1) și de egalitatea dintre numărul punctelor de coordonate întregi din cadrul diferitelor domenii, pe considerente de simetrie, obținem formula :

$$p_{1,n} = 1 + C_n^1 [n] + C_n^2 \left(2 \sum_{0 < x_1 \leq \frac{n}{2}} [n - x_1] - \left[\frac{n}{2} \right]^2 \right) + \dots +$$

$$+ C_n^n \left(n \sum_{0 < x_1, \dots, x_{n-1} \leq \frac{n}{n}} [n - x_1 - \dots - x_{n-1}] - (n-1) \left[\frac{n}{n} \right]^n \right)$$

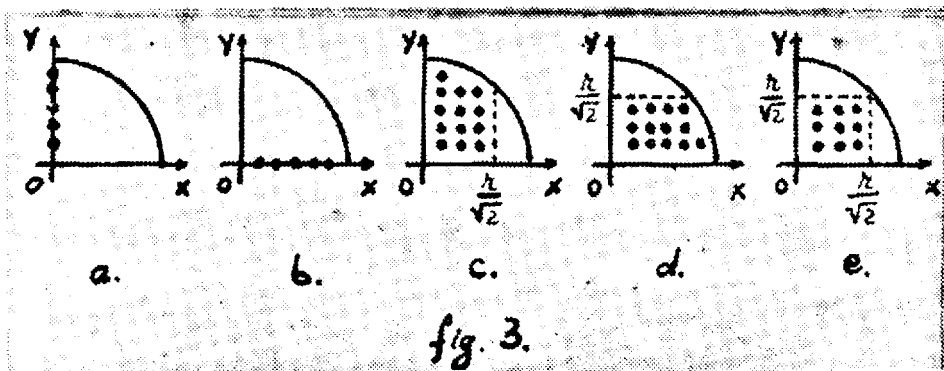
$$3) \quad x^2 + y^2 \leq r^2, \quad r > 0$$

În sistemul de coordonate carteziene xOy , ecuația $x^2 + y^2 = r^2$ reprezintă cercul de rază r cu centrul în origine. Punctele de coordonate întregi care satisfac inecuația se află pe sau în interiorul cercului. Spre deosebire de cazurile anterioare numărul soluțiilor întregi este finit. Pentru a-l calcula mai ușor mă voi ocupa mai întâi de numărul soluțiilor întregi nenegative, $p_2, 2$. Fie n_i numărul punctelor de coordonate întregi din domeniul plan D_i , unde $i = 1, 5$ și fie D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 următoarele domenii plane delimitate de inegalități :

respectiv

$$\begin{aligned} x &= 0, \quad 0 < y \leq r \\ y &= 0, \quad 0 < x \leq r \\ 0 < x \leq \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad 0 < y \leq \sqrt{r^2 - x^2} \\ 0 < y \leq \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad 0 < x \leq \sqrt{r^2 - y^2} \\ 0 < x \leq \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad 0 < y \leq \frac{r}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

În figura 3 a b c d e, am reprezentat pe n_1, n_2, n_3, n_4 respectiv n_5 :



Procedind ca la punctul 1) obținem $p_{2,2} = 1 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - n_5 = 1 + 2n_1 + 2n_3 - n_5$.

Pe considerente de simetrie față de axele de coordonate, numărul soluțiilor întregi este $q_{2,2} = 1 + 2^2 2n_1 + 2^2 (2n_3 - n_5) = 1 + 4n_1 + 8n_3 - 4n_5$. Folosindu-ne de teorema 1) obținem formula :

$$Z_{2,2} = 1 + 4[h] + 8 \sum_{0 < x \leq \left(\frac{h^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[\left(h^2 - x^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] - 4 \left[\left(\frac{h^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$$

$$4) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq h^2, \quad h > 0, n \geq 2$$

Procedind ca și în cazurile anterioare, obținem pentru numărul soluțiilor întregi $q_{2,n}$ formula :

$$Z_{2,n} = 1 + C_n^1 2[h] + C_n^2 2^2 \left(2 \sum_{0 < x_1 \leq \left(\frac{h^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[\left(h^2 - x_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] - \left[\left(\frac{h^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \right) + \dots +$$

$$+ C_n^n 2^n \left(n \sum_{0 < x_1, \dots, x_{n-1} \leq \left(\frac{h^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[\left(h^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] - (n-1) \left[\left(\frac{h^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^n \right)$$

$$5) \quad x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k \leq h^k, \quad h, k > 0, n \geq 2$$

În acest caz general putem calcula doar numărul soluțiilor întregi nenegative $p_{k,n}$ cu ajutorul formulei :

$$p_{k,n} = 1 + C_n^1 [n] + C_n^2 \left(2 \sum_{0 < x_1 \leq \left(\frac{n^k}{2}\right)^{\frac{1}{k}}} \left[\left(n^k - x_1^k \right)^{\frac{1}{k}} \right] - \left[\left(\frac{n^k}{2} \right)^{\frac{1}{k}} \right]^2 \right) + \dots +$$

$$+ C_n^n \left(n \sum_{0 < x_1, \dots, x_{n-1} \leq \left(\frac{n^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}}} \left[\left(n^k - x_1^k - \dots - x_{n-1}^k \right)^{\frac{1}{k}} \right] - (n-1) \left[\left(\frac{n^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}} \right]^n \right)$$

Dacă se cer soluțiile naturale ale inecuației, folosim ultima parte a formulei anterioare (paranteza înmulțită cu C_n^n).

În cazul în care k este de forma $2p/2q-1$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, numărul soluțiilor întregi $q_{k,n}$ este finit și poate fi exprimat cu ajutorul formulei :

$$q_{k,n} = 1 + C_n^1 2 [n] + C_n^2 2^2 \left(2 \sum_{0 < x_1 \leq \left(\frac{n^k}{2}\right)^{\frac{1}{k}}} \left[\left(n^k - x_1^k \right)^{\frac{1}{k}} \right] - \left[\left(\frac{n^k}{2} \right)^{\frac{1}{k}} \right]^2 \right) + \dots +$$

$$+ C_n^n 2^n \left(n \sum_{0 < x_1, \dots, x_{n-1} \leq \left(\frac{n^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}}} \left[\left(n^k - x_1^k - \dots - x_{n-1}^k \right)^{\frac{1}{k}} \right] - (n-1) \left[\left(\frac{n^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}} \right]^n \right)$$

$$6) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1, \quad a, b > 0$$

În sistemul de coordonate carteziene xOy ecuația $x/a + y/b = 1$ este ecuația dreptei care taie axele de coordonate în punctele $(a,0)$ și $(0, b)$. Numărul soluțiilor întregi fiind infinit, calculăm numărul soluțiilor întregi nenegative, pentru care punctele corespunzătoare se află pe sau în interiorul triunghiului determinat de axele Ox și Oy și de dreapta de ecuație $x/a + y/b = 1$. Procedăm la împărțirea triunghiului în domenii plane convenabil alese :

$$\begin{aligned}
D_1 & \quad x=0, \quad 0 < y \leq b \\
D_2 & \quad y=0, \quad 0 < x \leq a \\
D_3 & \quad 0 < x \leq \frac{a}{2}, \quad 0 < y \leq \frac{b}{2}(a-x) \\
D_4 & \quad 0 < y \leq \frac{b}{2}, \quad 0 < x \leq \frac{a}{b}(b-y) \\
D_5 & \quad 0 < x \leq \frac{a}{2}, \quad 0 < y \leq \frac{b}{2}
\end{aligned}$$

Folosindu-ne de teorema 1) și de faptul că numărul punctelor de coordonate întregi din D_5 este $[a/2][b/2]$, obținem pentru numărul soluțiilor întregi nenegative n , formula :

$$n_1 = 1 + [a] + [b] + \sum_{0 < x \leq \frac{a}{2}} \left[\frac{b}{a}(a-x) \right] + \sum_{0 < y \leq \frac{b}{2}} \left[\frac{a}{b}(b-y) \right] - \left[\frac{a}{2} \right] \left[\frac{b}{2} \right]$$

$$7) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad a, b > 0$$

În sistemul de coordonate xOy , ecuația $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ este ecuația elipsei de semiaxe a și b , cu centrul în origine. Elipsa fiind o curbă închisă, numărul soluțiilor întregi s_2 este finit și poate fi calculat cu formula :

$$\begin{aligned}
s_2 = & 1 + 2([a] + [b]) + 4 \left(\sum_{0 < x \leq \left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \right] + \right. \\
& \left. + \sum_{0 < y \leq \left(\frac{b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{a}{b}(b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \right] - \left[\left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \left[\left(\frac{b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \right)
\end{aligned}$$

$$8) \quad \frac{x^k}{a^k} + \frac{y^k}{b^k} \leq 1, \quad a, b, k > 0$$

Nu întotdeauna numărul soluțiilor întregi este finit, așa că, în cazul în care k este un număr real pozitiv, calculăm numărul soluțiilor întregi nenegative r_k cu formula :

$$r_k = 1 + [a] + [b] + \sum_{0 < x \leq \left(\frac{a^k}{2}\right)^{\frac{1}{k}}} \left[\frac{b}{a} (a^k - x^k)^{\frac{1}{k}} \right] + \\ + \sum_{0 < y \leq \left(\frac{b^k}{2}\right)^{\frac{1}{k}}} \left[\frac{a}{b} (b^k - y^k)^{\frac{1}{k}} \right] - \left[\left(\frac{a^k}{2}\right)^{\frac{1}{k}} \right] \left[\left(\frac{b^k}{2}\right)^{\frac{1}{k}} \right]$$

Numărul soluțiilor naturale este $r_k - 1 - [a] - [b]$.

În cazul în care k este de forma $2p/2q-1$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, numărul soluțiilor întregi este dat de formula :

$$S_k = 1 + 2([a] + [b]) + 4 \left(\sum_{0 < x \leq \left(\frac{a^k}{2}\right)^{\frac{1}{k}}} \left[\frac{b}{a} (a^k - x^k)^{\frac{1}{k}} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{0 < y \leq \left(\frac{b^k}{2}\right)^{\frac{1}{k}}} \left[\frac{a}{b} (b^k - y^k)^{\frac{1}{k}} \right] - \left[\left(\frac{a^k}{2}\right)^{\frac{1}{k}} \right] \left[\left(\frac{b^k}{2}\right)^{\frac{1}{k}} \right] \right)$$

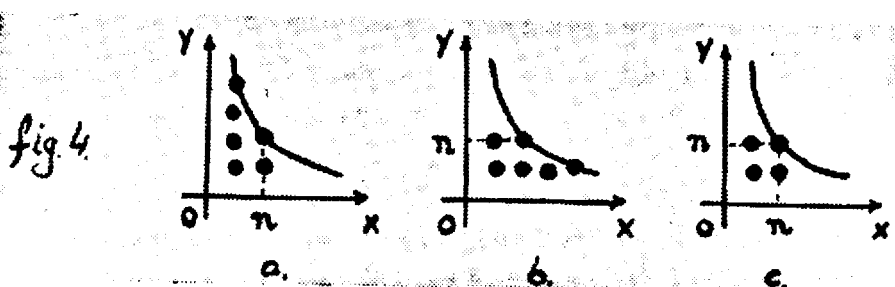
$$g) \quad xy \leq n^2, \quad n > 0$$

Într-un sistem de coordonate carteziene xOy , ecuația $xy = n^2$ reprezintă hiperbola echilateră raportată la asimptote. Numărul soluțiilor întregi nenegative fiind infinit, mă voi ocupa de soluțiile naturale. Fie n_i numărul soluțiilor naturale din domeniile plane D_i , $i = \overline{1,3}$ și fie D_1, D_2, D_3 următoarele domenii plane :

respectiv

$$\begin{aligned} 0 < x \leq n, \quad 0 < y \leq \frac{n^2}{x} \\ 0 < y \leq n, \quad 0 < x \leq \frac{n^2}{y} \\ 0 < x \leq n, \quad 0 < y \leq n \end{aligned}$$

În figura 4 a b c am reprezentat pe n_1 , n_2 , respectiv n_3 :



Pe considerente de simetrie $n_1 = n_2$. Deci $m_2 = n_1 + n_2 - n_3 = 2n_1 - n_3$, unde am notat cu m_2 numărul punctelor de coordonate naturale care satisfac inecuația dată. Folosindu-ne de teorema 1), obținem formula :

$$m_2 = 2 \cdot \sum_{0 < x \leq n} \left[\frac{n^2}{x} \right] - [n]^2$$

$$10) \quad x_1 x_2 \dots x_k \leq n^k, \quad n > 0, k \geq 2$$

Ca și în cazul particular, putem calcula doar numărul soluțiilor naturale m_k , de data aceasta cu formula :

$$m_k = k \cdot \sum_{0 < x_1, \dots, x_{k-1} \leq n} \left[\frac{n^k}{x_1 x_2 \dots x_{k-1}} \right] - (k-1) [n]^k$$

Observații: 1) În cazul în care se cere determinarea numărului de soluții de forma $(p_1 r, p_2 r, \dots, p_n r)$ unde $r > 0$ și $p_i \in \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ sau $\mathbb{N}^*$, înlocuim în inecuația dată orice variabilă x cu xr și determinăm cu ajutorul formulelor soluțiile întregi, întregi nenegative, respectiv naturale ale inecuației obținute.

2) Inecuația de la punctul 5) și inecuația în care în locul variabilei x_i avem $x_i - a_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$, au același număr de soluții întregi, deoarece originea sistemului de referință la care raportăm a doua inecuație are coordonate între i față de originea sistemului la care raportăm prima inecuație. La fel pentru inecuația de la punctul 8).

3) Formula care dă numărul soluțiilor întregi la inecuația de la punctul 5) este valabilă și pentru inecuația $|x_1|^k + |x_2|^k + \dots + |x_n|^k \leq r^k$, $r, k > 0, n \geq 2$. Analog pentru a doua formulă de la punctul 8).

4) La calcularea sumelor în formulele generalizate, cînd se cere ca p variabile să ia toate valorile întregi posibile de la 1 la q , avem q^p posibilități. Se va căuta gruparea lor convenabilă.

Aplicații 1) Să se calculeze numărul soluțiilor întregi ale inecuației $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 24$.

Folosind formula de la punctul 4), particularizată pentru $n = 4$, avem:

$$\begin{aligned} Z_{2,4} &= 1 + 8[\sqrt{24}] + 4 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 2 \sum_{0 < x \leq \sqrt{12}} [\sqrt{24 - x^2}] + 8 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3} \cdot 3 \cdot \\ &\cdot \sum_{0 < x, y \leq \sqrt{8}} [\sqrt{24 - x^2 - y^2}] + 16 \cdot 4 \cdot \sum_{0 < x, y, z \leq \sqrt{6}} [\sqrt{24 - x^2 - y^2 - z^2}] - \\ &- 24[\sqrt{12}]^2 - 64[\sqrt{8}]^2 - 48[\sqrt{6}]^2 = \end{aligned}$$

$$= 1 + 32 + 48 \cdot 11 + 96 \cdot 16 + 64 \cdot 28 - 24 \cdot 9 - 64 \cdot 8 - 48 \cdot 16 = 2393.$$

2) Să se calculeze numărul soluțiilor în numere raționale multipli întregi pozitivi de $1/3$ ale inecuației $xyzt \leq 1$.

Numărul cerut este egal cu numărul soluțiilor naturale ale inecuației $xyzt \leq 81$. (observația 1). Folosind formula de la punctul 10), avem:

$$m_4 = 4 \cdot \sum_{0 < x, y, z \leq 3} \left[\frac{81}{x y z} \right] - 3[3]^4 = 4S - 243$$

Suma S are $3^3 = 27$ termeni. Unii sînt egali între ei deoarece pentru valori diferite ale lui x, y și z produsul xyz poate lua aceeași valoare. Vom calcula pe S pornind de la valorile pe care le poate lua produsul xyz și ținînd cont de numărul posibilităților de a obține acest produs :

$$S = [81] + 3 [81/2] + 3 [81/3] + 3[81/4] + 6[81/6] + [81/8] + \\ + 3 [81/9] + 3 [81/12] + 3 [81/18] + [81/27] = 81 + 120 + \\ + 81 + 60 + 78 + 10 + 27 + 13 + 12 + 3 = 490$$

$$\text{Deci } m_4 = 4 \cdot 490 - 243 = 1960 - 243 = 1717$$

MARCEL PETRIȘAN, cl. a XII-a C

Lucrarea de față, completată ulterior, a fost distinsă cu premiul I la „Sesiunea națională de referate și comunicări științifice ale elevilor—matematică“, Pitești, august 1977.



LEGĂTURA DE HIDROGEN

Substanțele care conțin în molecula lor atomi puternic electronegativi ca: F, O, N, legați de atomi de hidrogen, manifestă o serie de proprietăți fizico-chimice care nu se pot explica decât printr-o asociere de mai multe molecule de același fel, între care se stabilesc legături mai puternice decât legăturile Van der Waals dar mai slabe decât legăturile covalente.

Astfel apa, acidul fluorhidric și amoniacul în stare lichidă prezintă „anomalii” în comparație cu hidrurile unor elemente vecine în sistemul periodic (CH_4 , PH_3 , H_2S , HBr etc.). Aceste anomalii constau în puncte de topire și de fierbere mai înalte, densități, capacități calorice și călduri de vaporizare mai ridicate.

Moleculele acestor lichide sînt asociate în agregate de formă $(\text{HF})_n$, $(\text{H}_2\text{O})_n$, etc. Modul cum sînt legate aceste molecule între ele a fost denumit legătură de hidrogen sau punte de hidrogen deoarece ea se datorește unei atracții electrostatice între protonii parțial dezgoliti de electroni dintr-o moleculă și o pereche de electroni neparticipanți ai unui atom puternic electronegativ dintr-o altă moleculă.

Astfel, în cazul concret al legăturii $\delta^- \quad \delta^+$
O — H se formează un puternic dipol deoare-

ce oxigenul puternic electronegativ deformează orbitalul legăturii π , mărind densitatea norului electronic în jurul său și diminuînd-o în jurul hidrogenului. Dacă o astfel de legătură se va găsi în apropierea unei legături de același fel orientate după axa

$\delta^- \quad \delta^+ \quad \delta^- \quad \delta^+$
O — H ... O — H, atunci atracția electrostatică între partea pozitivă a unuia

dintre dipoli și partea negativă a celuilalt va fi mai puternică decât respingerea dintre sarcinile de același fel, și cu atît mai puternică cu cît atomul de oxigen se va apropia mai mult de atomul de hidrogen, fapt favorizat de dimensiunile reduse ale atomului de hidrogen.

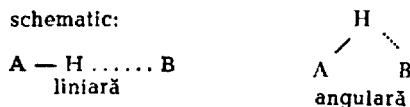
Într-o formă generală, legătura de hidrogen se stabilește între o grupă purtătoare de hidrogen A — H și un acceptor de proton B.

A — H B

Legătura de hidrogen a fost pusă în evidență și i s-au determinat caracteristicile pe cale experimentală (metode termodinamice, spectroscopice, electrice și magnetice etc.)

Se pot distinge legături de hidrogen libere cînd cele două molecule se pot lega fără ca piedici de natură geometrică sau sterică să se opună dispunerii lor optime, de obicei legătura de hidrogen fiind liniară, și legături „forțate” cînd condițiile geometrice impun o torsionare și adoptarea unei forme unghiulare (în cazul legăturii de hidrogen intramoleculare).

Iată cele două forme schematic:



În tabelul următor sînt cuprinse cîteva caracteristici ale legăturii de hidrogen.

Legătura	Substanța	Lungimea dintre A și B	Energia
O — H ... O	apă, baze	2,7 — 2,8 Å	5—7 k cal.
O — H ... O	acizi, săruri acide ale oxiacizilor	2,4 — 2,6 Å	6—8 k cal.
N — H ... F	NH_4F — cristale	2,6 Å	5 k cal.
N — H ... N	NH_3 cristale	3,4 Å	6 k cal.
F — H ... F	HF lichid	2,6 — 2,7 Å	7 k cal.

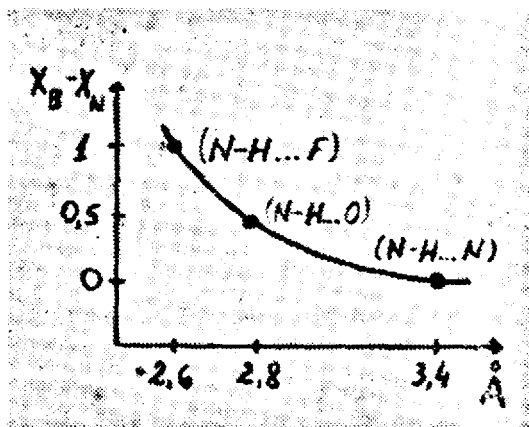
Se observă că energiile legăturilor sînt extrem de mici în comparație cu legătura covalentă. De exemplu legătura de hidrogen $H \dots O$ este $\frac{1}{20}$ din legătura covalentă $O - H$.

Datorită acestui fapt, temperatura influențează legătura de hidrogen dîndu-i caracter dinamic; atunci cînd temperatura crește legăturile se rup, distanța $A - H$ și B se mărește și dacă este cristalin acesta se distruge.

Diluarea joacă rol similar cu creșterea temperaturii. În pofida energiei mici creată la formarea unei legături de hidrogen se constată că stabilitatea lor este apreciabilă moleculele tinzînd să formeze cît mai multe astfel de legături.

Un alt lucru demn de remarcat este faptul că distanța totală $A \dots B$ depinde de electronegativitatea lui B , mai precis este în funcție de aceasta.

De exemplu, la legăturile $N - H$ se observă o scurtare a distanței $N \dots B$ atunci cînd electronegativitatea lui B crește.



Ca legătură analoagă celei de hidrogen, este doar legătura deuteriului. Celelalte elemente din sistemul periodic nu se leagă prin atracție dipolară de acest fel. Legăturile deuteriului prezintă cam aceleași caracteristici generale, dar mai puțin intense și cu distanțele $A \dots B$ ceva mai mari.

Cunoașterea legăturii de hidrogen prezintă importanță deosebită în explicarea structurii și proprietăților unor substanțe. Astfel structura cristalină de gheață este determinată de faptul că moleculele de apă sînt angajate în legături de hidrogen. O moleculă de apă formează patru legături de hidrogen orientate tetraedric în spațiu: două formate cu cei doi atomi de hidrogen și alte două formate cu cele două perechi de electroni neparticipanți ai oxigenului. Deoarece legătura de hidrogen are o lungime

de 1.75 Å, la solidificarea apei, deci formarea cristalină de gheață, se produce o mărire bruscă a volumului, astfel încît gheața are o structură afînată determinată de existența unui număr maxim de legături de hidrogen. Legăturile de hidrogen explică de asemenea punctul de topire ridicat al apei (0°C).

Deși au energii relativ mică, legăturile de hidrogen au rol important în multe reacții chimice, în special în domeniul biologic. Legăturile de hidrogen intervin în fixarea coloranților pe fibrele textile. De asemenea influențează proprietățile chimice ale substanțelor cum ar fi de exemplu modificarea acidității.

Ancateu Dan
Nicolae Florin
clasa IX-E



Organizația U. T. C. – Realizări și idealuri

Efervescența prilejuită de Conferința Națională a partidului, ne-a făcut și pe noi să ne angajăm în activitate cu mai multă tinerețe, cu mai mult entuziasm. Conferința U.T.C. pe școală, desfășurată în acest trimestru, prin programul adoptat, a încadrat munca noastră, pe linia celor mai înaintate tradiții ale luptei și vieții tineretului.

Ne-am dirijat forțele, înainte de toate spre a ne însuși cele mai noi cuceriri ale științei și culturii, spre a învăța, așa cum ne indica în nenumărate rânduri tovarășul Nicolae Ceaușescu, secretarul general al partidului, cel mai iubit prieten și îndrumător al tinerei generații. Rezultate îmbucurătoare au obținut organizațiile U.T.C. de la clasele a X-a A, D, a XII-a C, care nu numai că au lichidat corigența dar au reușit în mare parte să elimine și mediocritatea. Rezultatele bune pe care le-au obținut reflectă activitatea politico-ideologică matură, desfășurată în concordanță cu indicațiile organelor superioare ale U.T.C. Nu se poate spune același lucru despre alte organizații (destul de multe) la care atât ședințele de învățămînt politic cit și informările politice nu s-au realizat cu maturitatea necesară, fiind numai niște adunări formale, fără nici o substanță.

Multe păreri... Atâtia membri în activul U.T.C. și-au exprimat convingerea că viitoare acțiuni de acest gen vor fi mult mai atractive, așa că sperăm într-o reușită superioară a acestora în trimestrele viitoare.

Sperăm de asemenea că vor fi mult mai susținute acțiunile de colectare a deșeurilor de sticlă și hirtie, care drept să spunem, în trimestrul acesta nu s-au prea bucurat de importanța cuvenită.

Avem, de fapt, multe planuri de viitor. Vrem să valorificăm experiența obținută în domeniul cultural-artistic. Cole citeva discoteci pe care le-am organizat (care, oricum, au fost mult mai populate ca în anul trecut) ne-au dat curaj. În trimestrul acesta intenționăm să organizăm discotecă din două în două săptămîni, pregătind de fiecare dată program artistic, la organizarea căreia să-și aducă contribuția fiecare organizație în parte. Vom încadra aceste acțiuni în domeniul larg al marelui festival național „Cîntărea României”, dedicîndu-le evenimentelor alese pe care le sărbătorim în acest an.

Dar, ceea ce credem că va constitui un punct ales al programului nostru, e o acțiune pe care dorim s-o inițiem începînd din acest trimestru. Este vorba de a stabili legături de colaborare cu un alt liceu din țară, în scopul îmbunătățirii activității întregi.

Pentru viitor, ne angajăm să ne realizăm munca în așa fel încît să pășim cu cîinste, alături de toate organizațiile de tineret din țară, pentru a ne încadra în același șuvoi tinăr, viitor făuritor al comunismului în România.

Otilia Hedeșan
cl. a X-a E



Manifestare culturală demnă de liceul nostru

5 martie, 1978, ora 17... este ora marilor confruntări cu noi și cu timpul. Emoții, planuri, îndrăzneala gândurilor, speranța izbuzilor și a împlinirii.

De-a lungul citorva zeci de minute tovarășii profesori, părinții și elevii au putut urmări un program artistic variat prezentat de elevii de la liceul nostru: piese corale, lucrări simfonice, muzică ușoară, folk, poezii, dans modern, un montaj literar-muzical și o brigadă artistică de agitație.

În deschiderea programului cei mai tineri dintre noi — pionierii cravatelor roșii cu tricolor au dat „alea inimii lor pline de elan și avânt tineresc interpretând piesele: „Soarele și pionierii” de T. Popa, „Eliberatorii” de T. Bratu, „Drapelul” de T. Bratu și „Fata ardeleană” de Stoia — pregătiți de tov. prof. Strătilă Victoria.

Eleva Vasile Corina din clasa a VI-a A a interpretat la pian un „Vals german” de L.V. Beethoven.

Unul din punctele care s-a bucurat de un binemeritat succes a fost brigada artistică de agitație a clasei a V-a S, intitulată deosebit de sugestiv „Albina vede tot!”.

Talentatul nostru coleg lănto Adalbert din clasa a X-a A a interpretat la pian două piese simfonice ale marelui muzician L. V. Beethoven („Sonata lunii” și „Bagatela”).

Muzica tinăra a avut și ea un cuvânt de spus în cadrul serbării noastre. Un grup de trei elevi au interpretat cu multă sensibilitate o melodie intitulată „Înaltă-te omule!”, fiind aplaudați cu entuziasm de cei prezenți.

Muzică ușoară, reprezentată prin formația liceului (Csaky Ștefan, Szabo Attila, Verșigan Ioan și Moga Mircea) și solistele de muzică ușoară: Komori Lăcrimioara (clasa a X-a F), Karl Rosemarie (clasa a IX-a D) și Popa Doina-Claudia (clasa a XI-a E) au cucerit publicul prin tehnica interpretativă și melodiile bine alese.

În continuare eleva Colisnic Angela din clasa a XI-a E a prezentat „Fabula faptului divers” de A. Baranga și „Cîntec” de G. Coșbuc.

Inimi tinere, pline de dragoste față de țară, popor și partid — față în câteva cuvinte prezentarea corului liceului, dirijat de tov. prof. Strătilă Victoria care pune mult suflet în pregătirea unor astfel de manifestări culturale, devenite tradiționale în liceul nostru. Corul liceului a prezentat piesele: „Înaltă-te frumoasă țară” de I. D. Chiorescu, „Suris de aur” de I. Nicorescu și „Partid, pavăza mea!” de I. D. Chiorescu.

Opt eleve, cu multă ambiție și mișcări grațioase, au reușit să cucerească publicul cu dansul modern.

Serbarea școlară se încheie cu montajul literar-muzical intitulat „Drum de glorie”. Cîteva elevi animați de sentimente profunde au cîntat în versuri atășamentul față de partid și popor, făcînd să vibreze în inimile tuturor „Trăiască România”, pe versuri de Adrian Păunescu:

**„Trăiască-n fericire și liniște poporul,
Trăiască România! Trăiască Tricolorul!”**

Popa Doina-Claudia
clasa a XI-a E



UMORISTICE

MIC...

- Vă rog să-mi spuneți tovarășe de cînd nu mai există lacul care acum cîteva zile mai era aici?
- Nu mai există de cînd s-a scufundat vaporul cu transportul de sugativă.

APROVIZIONARE

- Vă rog o broască!
- N-avem.
- Atunci o yală!
- Nici pe asta n-o avem.
- Atunci un lacăt!
- Nici lacăt n-avem.
- Spuneți-mi atunci de ce nu închideți magazinul dacă tot nu aveți nimic în el?
- Fiindcă nu avem cu ce.

CĂMILA

- Ai auzit tu vreodată că o cămilă poate să lucreze opt zile fără să bea nimic?
- Ce te miri, eu știu pe unul care poate să bea opt zile fără să nu lucreze nimic.

TOATE BUNE

- Împrumută-mi, te rog, 100 de lei!
- Din toată inima, dar n-am nici un ban la mine.
- Și pe-acasă?
- Mulțumesc pentru întrebare: toți sînt sănătoși.

BINE NIMERIT

- Cum îți merge, tinere căsătorit?
- Mulțumesc pentru întrebare... Pînă acum toate bune, doar ceva nu-mi place, că nevastă-mea a nimerit-o mult mai bine cu mine decît eu cu ea.

Culese de Gh. Braun
cl. a XI-a E
din Almanahul „Lener”



Aritmogrif

TA-MI	LU	MI	NEA	ZĂ	MI
VIA	ȘI	CIND	ÎN	ȘI	MAI
LU	NE	CIND	PE-O	SĂ	E
A	BLIND	FĂR	RA	CA	MI
BORI	ÎN	CEA	ZĂ	DE-N	NES
CO	JOS	LU	PĂ	TRUN	CU

Pornind dintr-un anumit colț și urmărind un anumit drum, veți afla o cunoscută strofă și numele unui mare poet român.

Pornind dintr-un anumit colț și urmărind un anumit drum veți afla o strofă și numele poetului care a scris-o.

LESCU	NICI	TE	ȘI	ȘTI	VA	NU
MINU	O	POA	NU	NICI	LU	MEA
TĂ	DA	ȘTI-O	VA	ȘTIM	NU	NOI
IU	BIM	TOA	TĂ	IU	BI	NICI
NE	ȘI-O	MEA	E-A	VOM	NE	CIT
CĂ	ȘTIE	LU	DE	VĂ	RAT	DAR

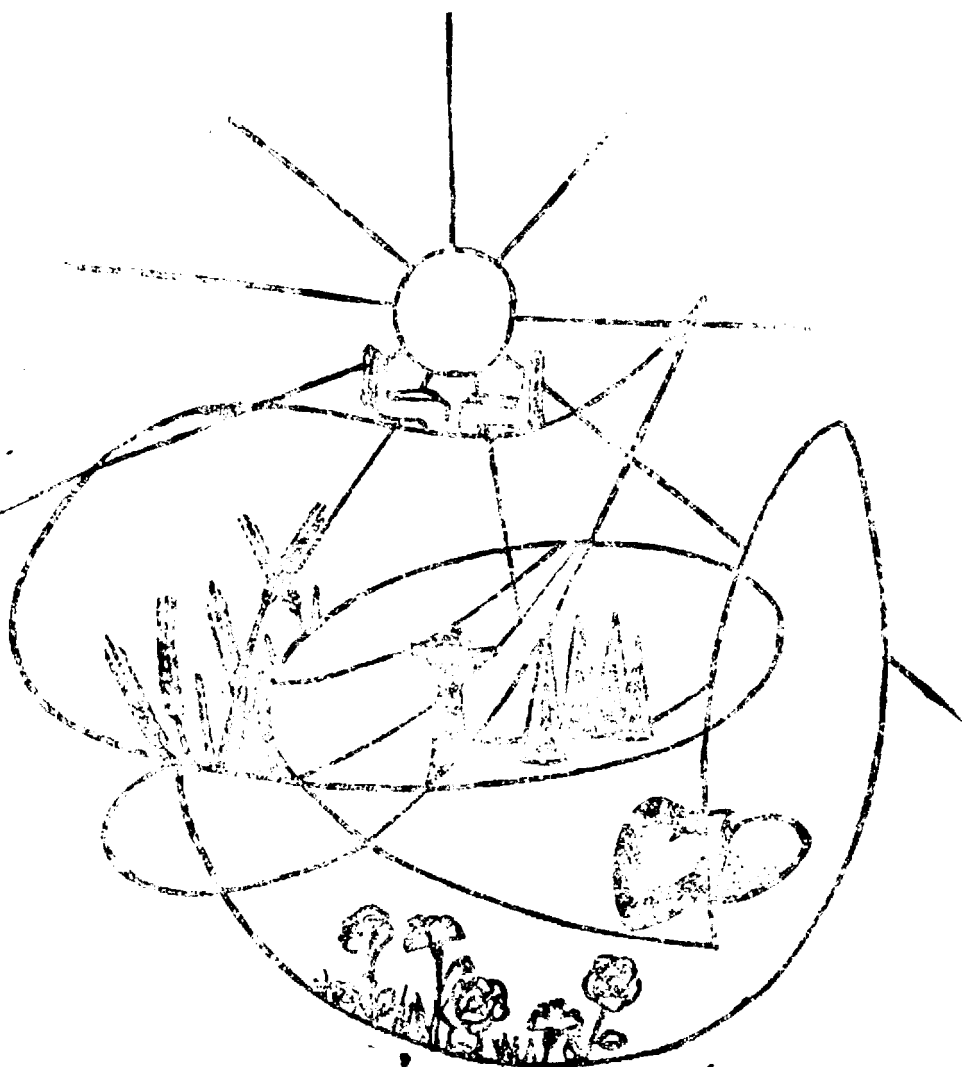
																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										</
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

De la A la B un mare scriitor român, colaborator al revistei „Viața Românească”, iar pe orizontală alte cuvinte tematic.

8	7	6	4	9	10	9	11	7	8
12	13	11	2	3					
6	9	8	3	4					
	14	1	4	1	15	3	9		
8	9	5	15	1	9	7	9		
	14	3	5						
	3	9	6	7	8				
9	8	16	7	2	7	8			

De la A la B. „Lucea-
fărul” poeziei românești,
iar pe orizontală cite-
va poezii care-i aparțin.

LUMINIȚA BALAJ,
cl. a XI-a E.



Breviar

Consemnăm cu satisfacție participarea masivă, cu rezultate calitativ superioare anului școlar precedent, a elevilor liceului nostru la o serie de acțiuni majore ce au avut loc în acest an școlar: concursuri pe obiecte și acțiuni cultural-sportive.

FAZA PE ȘCOALĂ ȘI PE JUDEȚ A CONCURSURILOR PE OBIECTE

Clasele gimnaziale

Obiectul	Total participanți	Nr. de participanți pe cl.				Reușiți pt. faza județeană
		V	VI	VII	VIII	
Limba română	16	—	—	11	5	11
Matematică	63	16	15	15	17	39
Istorie	28	—	—	—	28	12
Limba engleză	7	—	—	2	5	7
Limba franceză	8	—	—	5	2	6
Total general	122	16	15	33	58	93

FAZA PE ȘCOALĂ

Clasele liceale

Obiectul	Total participanți	Numărul de participanți pe clase			
		IX	X	XI	XII
Limba română	53	14	24	13	12
Limba maghiară	9	7	—	2	—
Limba germană	3	3	—	—	—
Limba franceză	16	2	5	4	5
Limba engleză	18	2	7	5	4
Matematică	82	23	24	17	18
Istorie	4	—	—	—	4
Filozofie	4	—	—	—	4
Fizică	84	34	22	25	3
Chimie	47	32	8	—	7
Științe biologice	28	11	—	15	2
Economie politică	6	—	—	2	4
Total general	354	128	90	83	53

FAZA PÊ JUDET

Clasele liceale

Obiectul	Total participanți	Numărul de participanți pe clase			
		IX	X	XI	XII
Limba română	33	9	20	3	1
Limba maghiară	6	4	—	2	—
Limba germană	1	1	—	—	—
Limba franceză	14	2	4	4	4
Limba engleză	17	2	6	5	4
Istorie	4	—	—	—	4
Filozofie	4	—	—	—	4
Economie politică	6	—	—	2	4
Matematică	82	23	24	17	18
Fizică	60	19	20	19	2
Chimie	37	27	5	—	5
Științe biologice	17	11	—	5	1
Total general	281	98	79	57	47

Rezultatele elevilor evidențiați la etapa județeană a concursurilor pe obiecte

LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ

Premiul I

Hedesan Otilia X-E, Achim Viorel X-E, Laza Diana XI-C.

Premiul II

Costache Mariana X-C, Mănescu Ada X-E, Turda Mariana XI-A, Rațiu Ionel XI-E.

Premiul III

Jacotă Cornelia IX-E, Jurca Claudia X-D.

Mențiuni

Dudău Dorina X-D, Harap Emil X-E.

LIMBA FRANCEZĂ

Premiul I

Farkas Iutka XI-D.

Premiul II

Ciul Lucian XII-C.

MATEMATICĂ

Premiul II

Cornea Emil XI-A.

Premiul III

Vulpe Dan IX-A, Perlan Carmen IX-A, Bakonyi Mihai X-D, Török Andrei X-D.

Mențiune

Bucerzan Ligia IX-A

FIZICĂ

Premiul I

Simu Călin IX-A.

Premiul II

Chicin Antoanela IX-A, Haș Ilieșor XI-C.

Premiul III

Tarnoczky Gabriela IX-A, Farcaș Mihai XI-B, Burger Francisc XI-C.

Mențiuni

Bercea Dinu IX-B, Părpăneată Christian XI-C, Ciobanu Mircea XII-C, Caracioni Adrian IX-E, Nagy Tiberiu IX-A, Puterity Miodrag IX-B, Matei Deliu IX-A, Măcean Mirela IX-A, Moț Marțian XI-A, Schwallie Robert XI-C,

CHIMIA

Premiul I

Schmidt Roswitha IX-D.

Premiul II

Stana Adriana IX-D, Grigore Monica XII-C.

Premiul III

Peia Renata IX-E.

Mențiuni

Nicolae Florin IX-E, Chivu Petronela IX-D, Herlo Monica XII-B.

ECONOMIE POLITICĂ

Premiul I

Radu Ovidiu XII-C, Herman Floare XII-A, Suciu Cornelia XII-B, Voicu Călin XI-E.

Premiul II

Mateuț Gheorghe XI-E.

Premiul III

Bogdan Anca XII-B.

BIOLOGIA

Premiul I

Crismar Daniela IX-E, Stoenescu Liana IX-E, Lupei Otilia XII-C.

Premiul III

Boboc Cristian IX-E, Pușcău Dorina IX-E.

Mențiune

Munteanu Emilia XI-E.

ISTORIE

Premiul II

Savin Dan XII-D.

LIMBA GERMANĂ (MATERNĂ)

Premiul I

Teichert Astrid IX-D.

LIMBA MAGHIARĂ (MATERNĂ)

Premiul I

Gaspar Izabella IX-D, Albert Erzsébet IX-D, Szabo Attila XI-D, Huma János XI-D.

LIMBA ENGLEZĂ

Premiul II

Simonfi Judith XI-E, Budurlișan Carmen XII-D.

Premiul III

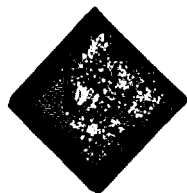
Hălmăgean Angela XII-D.

Mențiuni

Lungu Teodora XI-F, Ador Monica XII-D.



CAMPIOANA NAȚIONALĂ! Continuînd șirul unor rezultate de rezonanță națională, spre o tradiție, (vezi rezultatele obținute de: Ibolya Slavik, Maria Asavei, Coloman Sugi, precum și titlurile de campioană națională și balcanică ale primeia) iată un nou succes de excepție: colega noastră **MIHAELA BANCIU** din clasa a VIII-a sport, pregătită de prof. Traian Magheru, a devenit **CAMPIOANA NAȚIONALĂ** la 50 m plat. Ea a obținut acest răsunător succes la Concursul republican pentru juniori categoria a III-a, 14—15 ani, desfășurat în 11—12 martie a.c. la Focșani. Să mai adăugăm că Mihaela Banciu este foarte bună și la învățătură! Felicitări!



În competiția athletică școlară — Topul „Sportul” la lungime — sportivii școlii noastre, reprezentați prin clasa a IX-a G (sport) sub îndrumarea profesorilor Ioan Marconi și Simion Jarco, s-au comportat foarte bine. Deși au concurat în condiții deosebit de grele. (—3° Celsius) ei au obținut cele mai bune rezultate, depășindu-și partenerii din București, Timișoara, Sibiu, Suceava ș.a. Astfel ei dețin locul I pe echipe la băieți (5,09m, media primilor zece), locul I pe echipe la fete (4,18 m) și locul I la individual băieți prin Ioan Sumandan, 5,68 m și locul I individual fete prin Maria Cioba, 4,78 m. Iată componența echipei băieților în ordinea rezultatelor: Ioan Sumandan, Victor Sabău, Ionel Marinescu, Octavian Danciu, Aurel Botaș, Adrian Bodirlău, Francisc Schmidt, Ioan Păiușan, Gheorghe Șimandan, Dinu Bercea și pe cea a fetelor: Maria Cioba, Nicoleta Toma, Felicia Suciu, Mihaela Ardelean, Radmila Tirsin, Amalia Sisa, Doina Iacobescu, Ildico Csurka, Tatiana Cuzman, Elisabeta Erdelyi.

COLECTIVUL DE REDACȚIE

Îndrumător : prof. Ursu Pascu

Membri : elevii Lucia Crăciun, Emil Cornea, Claudia Popa,
Ada Mănescu

Ilustrația grafică : elevii Radu Tașcă, Eugen Moraru

REALIZAREA TEHNICĂ

Paginator : Ioan Mladin, maistru-zețar

